



**Oppilas omaa matematiikkaansa
rakentamassa opettajan ohjaamana
Varga – Neményi -kesäseminaari 2011**

**Toimittanut Pirjo Tikkanen
Varga – Neményi -yhdistys ry**

Oppilas omaa matematiikkaansa rakentamassa opettajan ohjaamana

Varga – Neményi -kesäseminaari 2011

Toimittanut Pirjo Tikkanen 2012

Julkaisija: Varga – Neményi -yhdistys ry, Espoo

**Toimituskunta:
Pirjo Tikkanen
Anni Lampinen**

**Julkaisun artikkelit ovat läpikäyneet referee-arvioinnin.
Kiitos arvioitsijalle.**

Kannen kuva: Ilari Lampinen

**Painopaikka: Itä-Helsingin Monistus Oy, Helsinki 2012
ISBN 978-952-5931-07-5 nidottu versio
ISBN 978-952-5931-06-8 PDF-versio**

SISÄLLYS

Oppilaslähtöisyyden lähteillä	6
Pirjo Tikkanen	
Japanilaista matematiikkaa	9
Markus Hähkiöniemi	
Ongelmanratkaisu oppilaiden kokemana	19
Pirjo Tikkanen	
"Ne on vaihtelevia lukuja." Muuttujat viidesluokkalaisten matematiikassa	28
Minna Muje	
Luokanopettajaopiskelijan matematiikkakuvan ilmeneminen luokkahuonekeskustelussa	41
Riina Harri	
Lähikehityksen vyöhykkeellä: 4.-luokkalaisten kokemuksia osaamiseltaan eritasoisen parin kanssa työskentelystä matematiikassa	54
Minna Muje	
Kertolaskun kombinatoriikkaa	62
Pirjo Tikkanen	

OPPILASLÄHTÖISYYDEN LÄHTEILLÄ

Pirjo Tikkanen

Julkaisun kannen perhoset kuvaavat Varga—Neményi –yhdistyksemme kuudetta toimintavuotta. Yksi yhdistyksen tavoitteista on tehdä tunnetuksi matematiikan Varga—Neményi –opetusmenetelmää Suomessa niin, että menetelmän soveltajilla on perusteet pedagogiselle valinnalleen. Menetelmän tunnetuksi tekemiselle on aiempaa vankemmat resurssit Helsingin yliopiston koulutus- ja kehittämiskeskus Palmenian ansiosta. Palmenia haki rahoitusta Varga—Neményi –opetusmenetelmän mukaiseen opettajien matematiikan täydennyskoulukseen Opetushallitukselta. Voimme siis järjestää 18 pitkäkestoista kurssia esiopetuksen ja vuosiluokkien 1-2 matematiikasta opettajille ja muille asiasta kiinnostuneille vuosina 2011—2013. Kiitos Palmenialle ja Opetushallitukselle.

Julkaisun teema on oppilaslähtöisyys, kuten Varga—Neményi –menetelmän periaatteiden periaate on taata oppijan ajattelulle parhaat mahdolliset opetukselliset ratkaisut. Aikoinaan Tamás Varga (1971b) kehotti opettajia harkitsemaan pedagogisesti verbalisointia eli kielentämistä. Sitä viivytetään, jotta hitaillakin oppilailla olisi tilaisuus itse kokea keksiminen eikä vastaanottaa valmista kielellistä ilmausta. Viivytetty verbalisointi auttaa ideaa kypsymään. Kolmanneksi on motivoivaa yrittää päästä selville salaisuudesta, jonka oppilas tietää, mutta ei jaa sitä toisten kanssa.

Varga (1971b) korosti kokemuksen merkitystä matematiikan oppimisessa: Kokemuksen pitäisi olla kaiken oppimisen lähtökohta. Kokemus ja sen avulla ymmärtäminen ovat valmiin verbaalisen tiedon esittämisen ja sen muistamisen vastakohta. Konkreetit kokemukset ovat sensomotorisia kokemuksia, joista induktiivisesti edetään kuvalliseen ja kielelliseen esitykseen, koska se myötäilee lapsen kehitystä ja luonnollista kiinnostusta ympäristöön. Sensomotorisissa kokemuksissa tuntoaistiin perustuvat kokemukset ovat tärkeimmät. Sensomotoriset kokemukset mahdollistuvat toimintavälineillä. Ne voivat olla manuaalisia esineitä tai painettua kirjallista materiaalia. Niiden avulla oppilaat voivat tutkia ja harjoitella abstraktisia käsitteitä sovelluksineen. He voivat toimintavälineillä esittää, kokeilla, ratkaista ja ymmärtää ongelmia. Niillä on myös mahdollista tarkistaa ja yleistää ratkaisumenetelmiä sekä luoda ajatusmalleja.

Tamás Varga (1971a) varoitti myös oppilaiden kankeista ryhmäajoista, joka lokeroi kuten kronologisen iän mukainen ryhmittelykin. Yli kolmekymmentä vuotta sitten Varga totesi, ettei tänä päivänä sellainen koulu ole enää utopiaa, jossa oppilas voi itsekkin arvioida soveltuvilla testeillä, miten hän edistyy. Esimerkiksi tietokonetta käyttämällä voidaan arvioida kielitaito, eri nopeus- ja vaikeusasteisten puhuttujen tekstien ymmärtäminen, kirjoittaminen ja kieliopin hallinta. Opettajan tuomarin rooli voi sitten lakata olemasta tällaisten menetelmien yleistyttyä. Tästä voi opiskeluilmapiiri ainoastaan parantua. ”Kun opettaja parhaan taitonsa mukaan,

järjestelmällisesti, kärsivällisesti ja innokkaasti opettaa luokkaa ja tulokset jäävät odotetuista, niin eikö häneltä vaadita mahdottomia ja hän oppilailta?” kysyi Varga ja jatkoi metaforalla: ”Miksi oppilaat vetäisivät moniin erikokoisiin jalkoihin yhdenkokoiset kengät? Ja vielä tuomitsemme lapset, jos he eivät osaa liikkua hyvin ahtaissa tai hölskyvissä kengissä! Olisi ihme, jos he viihtyisivät niissä. Mikä sitten neuvoksi? Valmista lääketta ei ole olemassa. Etsimme turhaan yhtä ainoaa tietä ratkaisuun, mutta eri teitä ratkaisuun kannattaa hakea.”

Julkaisumme on osoitus siitä, miten tutkijat, opettajat ja opettajaopiskelijat etsivät moninaisia teitä oppilaan ajattelun lähteille.

Ensimmäinen kirjoittajamme **Markus Hähkiöniemi** on filosofian tohtori ja tutkijatohtori Jyväskylän yliopiston opettajankoulutuslaitoksesta. Hän sai kutsun saapua Japaniin. Japanin matkallaan hänellä oli tilaisuus tutustua käytännön matematiikan opetukseen koulussa. Kuvaamassaan matematiikan tunnissa Hähkiöniemi konkretisoi havainnollisesti, miten opettaja voi opettaa oppilaslähtöisellä ja toiminnallisella ongelmanratkaisulla suunnikkaan pinta-alaa. Artikkelissa esitellään japanilaisoppilaiden erilaisia ratkaisuja, myös vääriä. Vääristä ratkaisuista oppilaiden kanssa keskustellaan, millä ehkäistään laajempien virhekäsitysten syntymistä. Hähkiöniemi vertaa japanilaista ongelmaratkaisumenetelmää sekä tutkivaan oppimiseen että Varga–Neményi -menetelmän periaatteisiin. Yhteystiedot markus.hahkioniemi(at)jyu.fi.

Pirjo Tikkanen on kasvatustieteen tohtori ja toimii Jyväskylän normaalikoulussa luokanlehtorina. Hän välittää suomalaisten oppilaiden piirrosten ja kertomusten avulla neljäsluokkalaisten kokemuksia ongelmanratkaisusta Varga–Neményi -opetusmenetelmällä: Matematiikan oppitunneilla oppilaat toimivat pienryhmissä välineitä käyttäen opettajan ohjattessa työskentelyä. Suomalaisoppilaat ovat innostuneita ongelmanratkaisusta, jota saisi olla enemmän. Turvallinen erehtymisen ilmapiiri motivoi. Sisäinen motivaatio saa oppilaat työskentelemään järjestäytyneesti. Hyvä ilmapiiri ja innostus ennakoivat onnistumista jatkossakin. Toisessa artikkelissaan Tikkanen tarjoaa visualisoitavan ongelman kertolaskusta. Tulojoukkojen yhdistelmästä voi syntyä kesäinen perhonen. Yhteystiedot pirjo.tikkanen(at)hirspek.fi

Minna Muje on luokanopettajaopiskelija Jyväskylän opettajankoulutuslaitokselta. Hänen artikkelinsa pohjautuu kasvatustieteen pro gradu -tutkielmaan viidesluokkalaisten käsityksistä muuttujista. Mujeen artikkelin teoreettinen viitekehys luotaa ansiokkaasti teeman keskeisintä kirjallisuutta. Vaikka aiemmat tutkimustulokset viestivät suomalaisoppilaiden heikohkosta yhtälönratkaisusta, Mujeen tutkielman tulokset ovat rohkaisevia. Käytännönläheisesti kirjoitettu artikkeli tulee kulumaan opettajien käsissä. Toisessa artikkelissaan neljäsluokkalaisten parityöskentelystä matematiikassa Muje esittää varoittavan esimerkin oppilaiden keskinäisestä auttamisesta. Sosiaalinen

vuorovaikutus oppimisen edistämiseksi vaatii pitkäkestoista harjoittelua ja oppilaiden asenteen muokkaamista, jotta se olisi toimivaa. Yhteystiedot minna.muje(at)jyu.fi

Riina Harri on kasvatustieteen maisteri ja toimii luokanopettajana Espoossa. Hänen artikkelinsa pohjautuu kasvatustieteen pro gradu -tutkielmaan luokanopettajan matematiikkakuvan vaikutuksesta luokkahuonekeskusteluun matematiikassa. Harri on hyödyntänyt kansallista ja kansainvälistä osuvaa kirjallisuutta opettajan ja oppilaiden vuorovaikutuksesta, mistä on opittavaa kaikilla opettajilla. Harrin esittelemä matematiikkakuva palauttane opettajien mieliin kouluaikaiset muistot ja piilevän pedagogisen vuorovaikutuksen eksplisiittiseen tarkasteluun.

Toivon, että julkaisu kuluu lukijoiden käytössä niin, että lehdet tippuu ja kannet jää, mutta kansissa säilyy kesäseminaarin muisto tää. Kaikki kukat kukkikoot ja perhoset niissä lennelkööt.

Rentouttavaa kesää ja toiminnallista yhdistysvuotta toivottaen

Jyväskylässä Vapun päivänä 2012

Pirjo Tikkanen

Lähteet

Varga, T. 1971a. A "kivételesek" vannak többen. (Poikkeuksellisia on monia).
Köznevelés 9, 163–169.

Varga, T. 1971b. General Introduction. Teoksessa W. Servais & T. Varga (toim.)
Teaching school mathematics. Harmondworth: Penguin, 11–33.

JAPANILAISTA MATEMATIIKKA Markus Hähkiöniemi

Tässä artikkelissa tarkastelen yhtä japanilaista viidennen luokan matematiikan tuntia, joka poikkeaa huomattavasti tyypillisestä suomalaisesta matematiikan tunnista. Tunnin aiheena oli suunnikkaan pinta-alan määrittäminen. Sen sijaan, että asia olisi käsitelty opettajajohtoisesti, oppilaat itse kehittivät useita erilaisia menetelmiä alan määrittämiseksi. Tunnin lopussa oppilaiden ratkaisumenetelmistä käytiin hedelmällinen keskustelu. Tunti havainnollistaa avoimen lähestymistavan ja japanilaisen matematiikan opetuksen hyviä puolia.

Johdanto

Erilaisten kulttuurien vertaileminen voi olla hedelmällinen lähtökohta opetuksen kehittämiseksi. Suomessa on haettu kehittämisideoita esimerkiksi unkarilaisesta (esim. Tikkanen 2008) ja japanilaisesta (esim. Pehkonen 2011) matematiikan opetuksesta. Tämän artikkelin tavoitteena on tarkastella millaisista tekijöistä yksi erinomainen japanilainen matematiikan tunti rakentui.

Suomessa tyypillisellä matematiikan tunnilla opettaja ensin käsittelee uuden asian ja sitten harjoitellaan opitun käyttämistä oppikirjan tehtävissä (Savola 2008; Tikkanen 2008). Shimizun (1999) mukaan tyypillisen japanilaisen matematiikan tunnin rakenne on seuraava:

- Ongelman esittely
- Oppilaiden yksilöllinen ongelman ratkaisu
- Koko luokan keskustelua ratkaisumenetelmistä
- Opettajan yhteenveto

Tunnin onnistumisen kannalta ratkaisevana Japanissa pidetään oppilaiden ratkaisumenetelmistä keskustelemista, josta Japanissa käytetään termiä "neriage" (Shimizu 1999; Takahashi 2008). Ratkaisumenetelmistä keskustelun ideana on käsitellä opettajan valikoimien ratkaisujen yhtäläisyyksiä ja eroja sekä etuja ja haittoja ja näin oppia tavoitteena oleva asia. Japanissa siis uusi asia opetetaan tunnin lopussa, kun taas Suomessa se useimmiten opetetaan tunnin alussa.

Toinen japanilaista matematiikkaa kuvaava piirre on avoin lähestymistapa (Nohda 2000; Ueda 2000; Pehkonen 2011; 1997). Avoimessa lähestymistavassa oppiminen alkaa avoimista ongelmista, joissa lähtötilanne, lopputilanne tai prosessi on avoin. Jos lähtötilanne on avoin, ratkaisijan pitää itse osallistua ongelman muodostamiseen tekemällä valintoja. Jos taas lopputilanne on avoin, ongelmaan on useita oikeita ratkaisuja. Myös prosessi voi olla avoin, jolloin tehtävän voi ratkaista usealla eri tavalla. Avoimen lähestymistavan tarkoitus on kehittää matemaattista ajattelua kaavamaisen suorittamisen sijasta (Nohda

2000; Ueda 2000). Uedan (2000) mukaan avoimella lähestymistavalla on seuraavia etuja:

- Oppilaat tuntevat osallistuvansa matematiikan tunnilla ja alkavat keskustella matematiikasta.
- Oppilailla on paljon mahdollisuuksia integroida oppimiaan tietoja ja taitoja sekä käyttää niitä ymmärtäen.
- Kaikentasoisilla oppilailla on mahdollisuus saada oikea vastaus.
- Oppilaat ovat motivoituneita omien ideoidensa selittämiseen ja perustelemiseen.
- Oppilaat saavat kokea löytäneensä itse jotain matematiikasta ja iloita ajatustensa jakamisesta.

Japanilaisessa matematiikan opetuksessa ongelmanratkaisun ja matemaattisen ajattelun painottamisella on pitkät perinteet (Iwasaki & Ueda 1999). Ongelmanratkaisua ja matemaattista ajattelua korostetaan myös muissa nykyaikaisissa matematiikan opetusmenetelmissä. Matematiikan opetuksen ja oppimisen kansainvälisten asiantuntijoiden keskuudessa vallitsevan käsityksen mukaan matematiikkaa opitaan tehokkaasti käyttämällä oppilaslähtöisiä, vuorovaikutusta korostavia opetusmenetelmiä, joissa oppilaat itse tutkivat jotain matematiikan ilmiötä tehtävissä, joihin heillä ei ole valmiita ratkaisumenetelmiä (ks. Hähkiöniemi, hyväksyty). Artikkelin lopussa käsittelen myös yhteyksiä Varga-Neményi -opetusmenetelmään.

Japanilainen 5. luokan tunti suunnikkaan pinta-alasta

Olin syksyllä 2010 vierailulla Hiroshiman yliopistossa professori Atsumi Uedan kutsumana. Osana vierailua seurasimme yhden 45 minuutin viidennen luokan tunnin tavallisessa koulussa. Tässä esittämäni havainnot tuosta oppitunnista perustuvat tekemiini muistiinpanoihin. Tunnilla oli mukana tulkki, joka käänsi tärkeimmät tunnin osat englanniksi. Lisäksi minulla oli englanniksi käännetty tuntisuunnitelma.

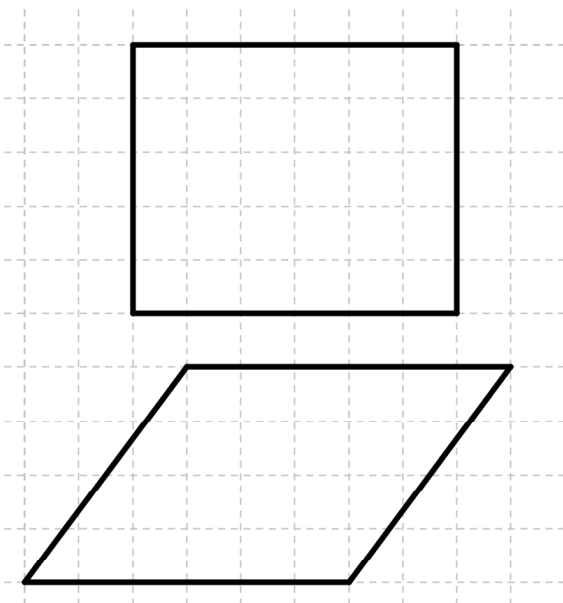
Tuntisuunnitelma: Tunnin aiheena oli suunnikkaan pinta-alan määrittäminen. Oppilaat olivat aikaisemmin opiskelleet suorakulmion alan määrittämisen, mutta suunnikkaan pinta-alaa käsiteltiin tällä tunnilla ensimmäisen kerran. Opettajalla oli paljon kokemusta, ja hän oli toteuttanut tämän tunnin useaan kertaan. Hän oli laatinut tuntia varten kuusisivuisen tuntisuunnitelman. Tuntisuunnitelman pääosa oli taulukko, jossa oli esitetty tunnin oppimisaktiviteetit, hypoteeseja oppilaiden mahdollisesta toiminnasta sekä opettajan mahdollisia tapoja tukea oppilaita (ks. taulukkoa 1). Shimizun (1999) mukaan samankaltainen tuntisuunnitelma-tila on Japanissa yleinen.

Ongelman alustus: Tunnin alussa opettaja esitti taululla suorakulmion ja suunnikkaan, joiden sivujen pituudet olivat samat (kuten kuviossa 1). Opettaja

kyseli oppilailta, mitä yhteistä ja mitä eroa nelikulmioilla on. Näin opettaja varmisti, että oppilaat kiinnittävät huomiota siihen, että nelikulmioiden piirit ovat yhtä suuret. Piirien yhtäsuuruutta havainnollistaakseen opettaja oli rakentanut pilleistä ja narusta suunnikkaan, jonka kulmia pystyi muuttamaan, mutta sivujen pituuksia ei (kuten kuviossa 8). Keskustelun aluksi oppilaat olivat sitä mieltä, että suorakulmion ja suunnikkaan alat ovat yhtä suuret. Lisäksi oppilaat laskivat suorakulmion alaksi $5 \times 6 = 30$. Mittayksikön huomioiden he saivat vastaukseksi 30 cm^2 . Näin tunnin aiheen kannalta tärkeä ennakkotieto eli suorakulmion alan laskeminen tuli myös kerratuksi.

Taulukko 1. Tuntisuunnitelma

Oppimisaktiviteetit (kysymykset)	Hypoteesit oppilaiden mahdollisesta toiminnasta tai reaktioista	Opettajan mahdollinen tuki
Esimerkiksi tunnin rakenteen opettaja oli hahmottanut seuraavasti: 1. Ongelman ymmärtäminen 2. Yksilöllinen oppiminen 3. Kollektiivinen oppiminen 4. Reflektointi	Opettaja oli esimerkiksi esittänyt monta erilaista tapaa määrittää suunnikkaan ala.	Opettaja oli esimerkiksi kirjoittanut, että oppilaat saavat selittää ideansa ja tarkastella yhtäläisyyksiä muiden oppilaiden ideoihin.



Kuvio 1. Oppilaille annettu moniste. Kuvan alla luki "Minun ideani".

Kun oppilaat olivat sitä mieltä, että suorakulmion ja suunnikkaan pinta-alat ovat yhtä suuret, opettaja ei ottanut kantaa siihen, ovatko oppilaat oikeassa. Sen sijaan opettaja kysyi oppilailta, miksi alat ovat yhtä suuret. Oppilaat äänestivät innokkaina asiasta ja vähitellen oppilaat alkoivat muuttaa mielipidettään. Tässä vaiheessa opettaja selvitti oppilaille, että nyt on tarkoitus pohtia, miten suunnikkaan pinta-ala voidaan laskea. Näin opettaja oli alustanut ongelman, varmistanut oppilaiden ymmärtävän ongelman, kerrannut ratkaisussa tarvittavat tiedot, korostanut tunnin tavoitetta ja motivoinut oppilaita ongelman ratkaisemiseen. Tämän jälkeen opettaja jakoi oppilaille kuviossa 1 esitetyn monisteen, jossa kysyttiin heidän ideaansa suunnikkaan alan laskemiseksi. Tässä vaiheessa aikaa oli kulunut 15 minuuttia.

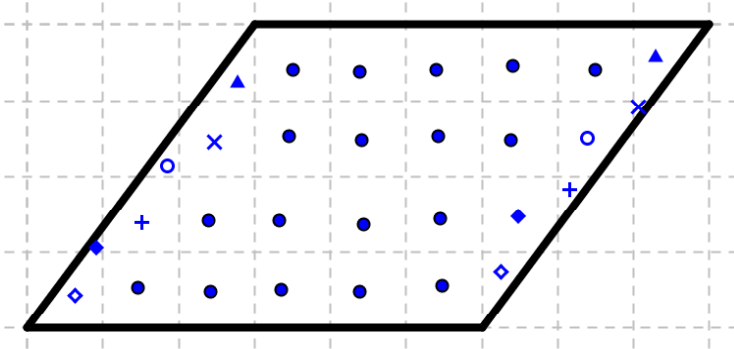
Yksilöllistä ongelmanratkaisua: Opettajan jaettua monisteet oppilaat alkoivat yksinään hiljaa työskennellen ratkaista ongelmaa. Opettaja ajasti munakelloon 7 minuuttia aikaa yksilölliseen työskentelyyn. Opettaja kierteli luokassa seuraamassa oppilaiden työskentelyä. Kun oppilas oli keksinyt yhden tavan laskea suunnikkaan ala, hän sai hakea opettajan pöydältä uuden monisteen ja alkaa keksiä toista, erilaista ratkaisutapaa. Useat oppilaat ehtivätkin hakea toisen monisteen. Esitän esimerkkejä oppilaiden ratkaisumenetelmistä tuonnempana.

Ratkaisuideoiden selittäminen vierustoverille: Munakello ilmoitti yksilöllisen työskentelyn päättyneen 7 minuutin kuluttua. Opettaja pyysi oppilaita selittämään ratkaisuideansa vierustoverilleen. Tähän käytettiin aikaa 5 minuuttia.

Koko luokan keskustelua ratkaisumenetelmistä: Loppuosa tunnista (18 min) käytettiin opettajan johdolla käytävään koko luokan keskusteluun. Opettaja pyysi aluksi viittä oppilasta esittämään ratkaisunsa. Opettaja oli ilmeisesti valinnut nämä oppilaat jo edellisissä vaiheissa, koska oppilaiden ratkaisut olivat erilaisia. Oppilaat tulivat yksitellen luokan eteen näyttämään ja selittämään menetelmänsä suunnikkaan pinta-alan laskemiseksi. Opettaja oli varannut valmiiksi pahvista leikattuja oikeankokoisia suunnikkaita, joihin oppilaat saattoivat piirtää tai joita he voivat leikata. Ratkaisumenetelmät kiinnitettiin taululle vierekkäin, ja jokaisen menetelmän yläpuolelle opettaja kiinnitti oppilaan nimikyltin. Oppilaiden nimiä käyttämällä opettaja vahvisti käsitystä siitä, että tunnilla rakennettava matematiikka on oppilaiden omaa matematiikkaa. Seuraavassa ratkaisut esitetään siinä järjestyksessä kuin oppilaat ne esittivät.

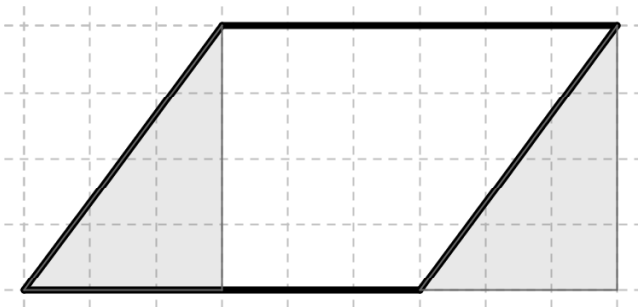
Oppilas A esitti ratkaisuksi kokonaisten ruutujen laskemisen. Hän aloitti laskemalla kaikki kokonaiset ruudut, joita oli 18. Oppilas havainnollisti näitä kokonaisia ruutuja pienillä ympyräsymboleilla (ks. kuviota 2). Tämän jälkeen oppilas yhdisti vaillinaisista ruuduista pareittain kokonaisia. Aina yhtä paria, jotka muodostivat kokonaisen ruudun, hän merkitsi tietyllä symbolilla (ks. kuviota 2). Yhdistelemällä hän sai 6 kokonaista ruutua. Yhteensä hän sai siis pinta-alaksi 24 cm^2 . Tässä menetelmässä korostuu hyvin pinta-alan perusidea

eli se, että pinta-ala neliösenttimetreinä tarkoittaa, kuinka montaa neliösenttimetrinkokoista ruutua alue vastaa.



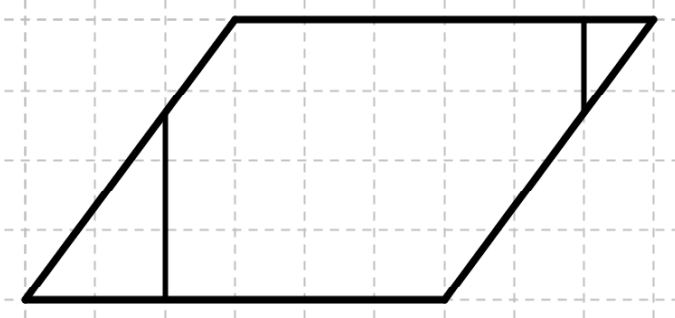
Kuvio 2. Oppilaan A ratkaisu: kokonaisten ruutujen laskeminen.

Oppilaan B ratkaisumenetelmänä oli leikata suunnikkaasta kolmio ja liittää se toiselle puolelle suunnikkaasta niin, että muodostui suorakulmio (ks. kuviota 3). Suorakulmion alaksi oppilas laski $4 \times 6 = 24$ eli vastaukseksi hän sai 24 cm^2 . Tämä ratkaisu havainnollistaa, että pinta-ala säilyy samana, vaikka alue jaetaan osiin ja osia siirrellään. Muuttamalla alue suorakulmioksi on sen sisältämien neliösenttimetrien (ruutujen) määrä helppo laskea kertolaskulla.



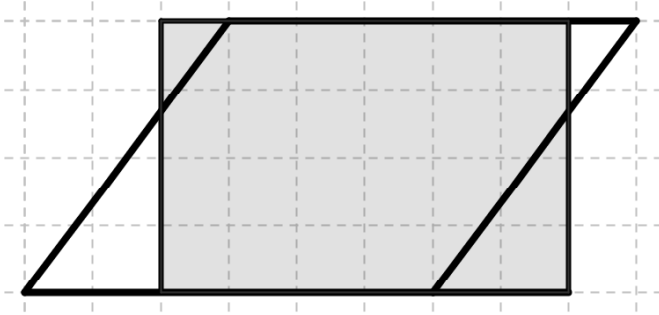
Kuvio 3. Oppilaan B ratkaisu: kolmion siirtäminen.

Oppilas C selitti ratkaisuaan ensin suullisesti ja piirtämällä. Hänen ideansa oli tehdä kuviossa 4 esitetyt kaksi leikkausta suunnikkaan eri puolille. Hänen selittäessään ratkaisuaan luokkaan laskeutui odottava hiljaisuus.



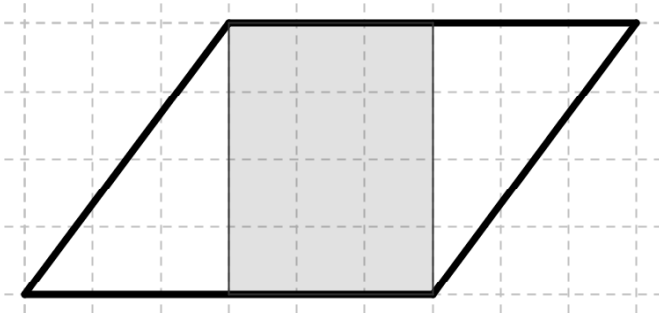
Kuvio 4. Oppilaan C kaksi leikkausta.

Luokka seurasi jännittyneenä, kun oppilas C opettajan avustuksella konkreettisesti leikkasi kaksi syntynyttä kolmiota irti ja siirsi ne niin, että muodostui suorakulmio (ks. kuviota 5). Samalla hetkellä luokasta kuului kunnioittava huokaus: "Oo!" Tämä ratkaisu havainnollistaa hyvin, kuinka luovatkin ratkaisut ovat mahdollisia, kun oppilaat saavat itse osallistua matematiikan tekemiseen.



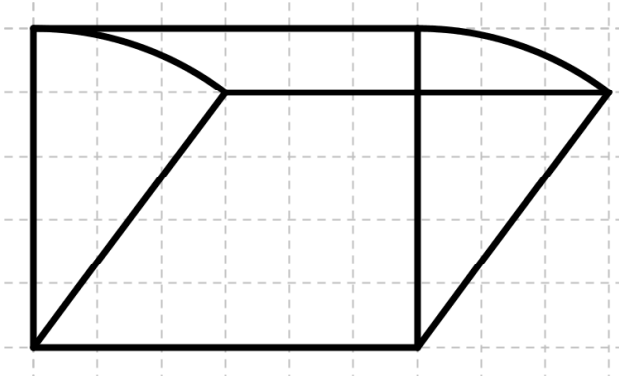
Kuvio 5. Oppilaan C ratkaisu: kahden kolmion siirtäminen.

Oppilaan D ratkaisu oli jakaa suunnikas suorakulmioksi ja kahdeksi kolmioksi (ks. kuviota 6). Suorakulmion alaksi hän laski $4 \times 3 = 12$ ja kolmioiden yhteenlasketuksi alaksi $4 \times 3 = 12$. Siten hän sai vastaukseksi 24 cm^2 .



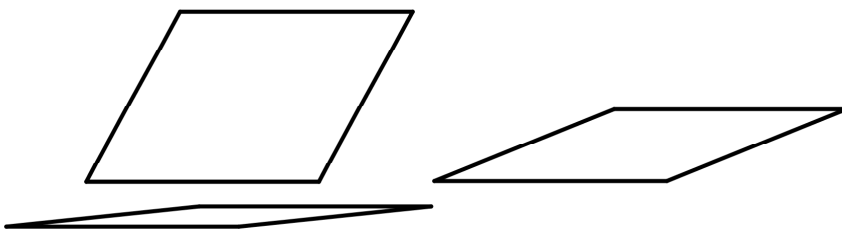
Kuvio 6. Oppilaan D ratkaisu: jakaminen suorakulmioon ja kahteen kolmioon.

Oppilas E näytti oman ratkaisunsa dokumenttikameralla, koska hän oli tehnyt merkintöjä paperiin. Hänen ideansa oli, että suunnikkaan ala on yhtä suuri kuin suorakulmion, jonka sivut ovat samannumeraiset. Hän oli havainnollistanut ratkaisuaan piirtämällä kuviossa 7 esitetyt ympyrän kaaret. Siten hänen ratkaisunsa suunnikkaan alaksi oli $5 \times 6 = 30$.



Kuvio 7. Oppilaan E ratkaisu: sivujen tulo.

Oppilaan E ratkaisu on arvokas, koska se ympärää hyödyntäen tuo loistavasti esille, että suunnikkaita, joilla on sama piiri, on monta. Lisäksi sen avulla saadaan vielä käsiteltyä yleinen virhekäsitys, että suunnikkaan ala on sivujen tulo. Luultavasti opettaja oli juuri tästä syystä valinnut tämän oppilaan esittämään ratkaisunsa. Esityksestä syntyi mielenkiintoinen keskustelu. Opettaja kysyi, mitä mieltä muut oppilaat ovat tästä ideasta, jolloin useat oppilaat vastustivat sitä. Opettaja halusi kuitenkin selityksen, miksi ei suunnikkaan ja suorakulmion ala ole yhtä suuri. Tällöin eräs oppilas tuli luokan eteen ja näytti pilleistä ja narusta rakennetun havainnollistuksen avulla, ettei ala voi pysyä samana. Tämä näkyi selvästi, kun oppilas muutti suunnikkaan kulman hyvin pieneksi (ks. kuviota 8). Tämä tilanne näyttää, kuinka hedelmällisiä oppilaiden ns. virheelliset ratkaisut voivat olla. Tilanne paitsi ehkäisi virhekäsityksen syntymistä myös opetti matemaattista ajattelua, tarkemmin sanottuna väitteiden osoittamista epätosiksi. Tunnin jälkeen opettaja kertoi, ettei oppilaalle E luultavasti jäänyt negatiivista mielikuvaa tilanteesta, sillä hän on luonut luokkaan ilmapiirin, jossa kaikkia ideoita arvostetaan. Hän kertoi myös totuttaneensa oppilaansa siihen, että tärkeä ei ole vastaus vaan ajatteluprosessi. Oppilas E oli selvästi ajatellut asiaa, ja hänen panoksensa luokan matematiikan oppimiseen oli merkittävä.



Kuvio 8. Oppilas näytti, ettei pinta-ala voi pysyä samana, jos kulma muuttuu.

Edellä esitettyjä oppilaiden ratkaisuja käsitellessään opettaja kyseli oppilailta, millaisia yhteisiä piirteitä oppilaiden A–E ratkaisuissa on. Tässä yhteydessä havaittiin muun muassa, että useassa ratkaisussa suunnikas muutettiin suorakulmioksi. Oppilaat myös kehuivat oppilaan A ideaa hyväksi, mutta oikeiden pariin yhdistämistä kokonaisten ruutujen muodostamiseksi pidettiin vaikeana. Näin tuli vielä varmistetuksi, että oppilaat arvostavat suunnikkaan

muuttamista suorakulmioksi. Opettaja totesi vielä tunnin loppuksi, että ensi kerralla käsitellään, miten suunnikkaan ala voidaan laskea ilman leikkaamista.

Pohdinta

Tunnin rakenne oli sellainen, miksi Shimizu (1999) kuvasi tyypillisen matematiikan tunnin. Tunnin rakenne on myös samanlainen kuin tutkivan matematiikan tunnin rakenne: alustus-, tutkimus- ja koontivaihe (ks. Hähkiöniemi, hyväksytty; Stein ym. 2008). Tunnin alustusvaiheessa opettaja varmisti, että kaikki ymmärtävät ongelman, ja herätti oppilaiden motivaation ongelman ratkaisuun. Tutkimusvaiheessa oppilaat ratkaisivat itsenäisesti ongelman. Toisin kuin tutkivassa matematiikassa yleensä, oppilaat eivät työskennelleet pareittain tai ryhmissä. Sen sijaan tällä tunnilla oppilaiden välistä vuorovaikutusta hyödynnettiin, kun he yksilöllisen ongelmanratkaisun jälkeen selittivät ideansa vierustoverilleen. Koontivaiheessa oppilaat selittivät ratkaisumenetelmiään ja niistä keskusteltiin opettajan johdolla. Koontivaiheen tärkeys korostui selvästi tällä tunnilla. Ilman sitä oppilaiden tutkimukset olisivat jääneet irrallisiksi.

Tarkastellulla tunnilla sovellettiin myös avointa lähestymistapaa. Tässä tapauksessa ongelma itsessään (tietyn suunnikkaan alan määrittäminen) oli varsin tavanomainen. Mutta koska suunnikkaan pinta-alaa ei ollut aiemmin käsitelty, oli se oppilaille todellinen ongelma. Ongelman avoimuus riippui selvästi kontekstista. Opettaja rohkaisi oppilaita keksimään useita erilaisia ratkaisutapoja, mikä kertoo siitä, että ratkaisuprosessi oli avoin (Nohda 2000). Oppilaiden luovat erilaiset ratkaisutavat saivat aikaan mielenkiintoisen ja kehittävän keskustelun. Tämä havainnollisti käytännössä Uedan (2000) esittämiä avoimen lähestymistavan etuja.

Jos opettaja ensin käsittelisi suunnikkaan alan kaavan ja sitten oppilaat käyttäisivät kaavaa tehtävissä, korostuisi mekaaninen laskeminen. Näin vahvistettaisiin kuvaa matematiikasta epäluovana sääntöjen seuraamisena. Sen sijaan tarkastellulla japanilaisella tunnilla oppilaat saivat mahdollisuuden itse kehittää menetelmän suunnikkaan alan laskemiseksi. Näin korostettiin matematiikkaa nimenomaan luovana ajatteluna, ja että matematiikassa muodostetaan sääntöjä eikä vain käytetä niitä mekaanisesti.

Tällä tunnilla käytetyllä opetusmenetelmällä on myös havaittavissa samoja piirteitä kuin Varga-Neményi -menetelmällä. Varga-Neményi -menetelmän eräs periaate on lupa erehtyä, väitellä ja iloita (Tikkanen 2008). Periaate korostui myös tällä tunnilla, sillä oppilaiden virheellisiä ratkaisuja käsiteltiin avoimesti ja matemaattisia väittelyjä rohkaistiin. Oppilaat myös iloitsivat saadessaan kehittää omia ideoitaan ja selittää niitä muille. Muita yhteyksiä Varga-Neményi -menetelmään olivat myönteisen ilmapiirin kehittäminen, ongelmanratkaisun korostuminen sekä yksilö-, pari- ja koko luokan yhteisten työskentelymuotojen vaihtelu (vrt. Tikkanen 2008). Myös opettajan rooli tunnin suunnittelussa ja riippumattomuus oppikirjasta korostuvat kummassakin menetelmässä. Toisin kuin tällä tunnilla Varga-

Neményi -menetelmän mukaan suunnitellulla tunnilla oppilaille olisi luultavasti annettu joitakin konkreettisia toimintavälineitä kuten sopiva suunnikaspalapeli, pahville piirrettyjä suunnikkaita ja saksia tai yhden neliösenttimetrin kokoisia neliöitä, joilla alaa voisi arvioida. Toisaalta oppilaat olisivat jo aiemmin voineet tutustua geometristen kuvioden ominaisuuksiin toimintavälineiden avulla esimerkiksi Neményin (2010) esittämässä ongelmassa. Tämän jälkeen oppilaat olisivat valmiita tarkastelemaan pinta-alaa abstraktimmalla tasolla eli kuvien perusteella kuten tällä japanilaisella tunnilla.

Lähteet

- Hähkiöniemi, M. (Hyväksytty). Miten opettaja kokee valmiiksi suunnitellun opetusjakson tukevan GeoGebra-avusteisen tutkivan matematiikan toteuttamista? Hyväksytty teokseen J. Joutsenlahti & H. Silfverberg (Toim.), Proceedings of the Annual Symposium of the Finnish Mathematics and Science Education Research Association, Tampere, 14-15.10.2010.
- Iwasaki, H. & Ueda, A. 1999. Development of mathematics education in Japan from Meiji era to present time: focusing on the change of realism and academism. *International Journal of Curriculum Development and Practice*, 1, 103–112.
- Neményi, E. 2010. Luova ajattelu ja toiminta. Teoksessa P. Tikkanen (toim.), YHDESSÄ! Varga-Neményi -yhdistyksen 5-vuotisjuhlakirja. Espoo: Varga-Neményi ry, 30–52.
- Nohda, N. 2000. Teaching by open-approach method in Japanese mathematics classroom. Teoksessa T. Nakahara & M. Koyama (Toim.), Proceedings of the 24th conference of the international group for the psychology of mathematics education (Vol. 1, s. 39–53). Hiroshima, Japan: PME.
- Pehkonen, E. 2011. Luovuus matematiikassa – Osa 1. *eDimensio* 2011. Saatavilla osoitteesta <http://www.maol.fi/julkaisut/edimensio/dimensiossa-julkaistua/>
- Pehkonen, E. 1997. Introduction to the concept "open-ended problem". Teoksessa E. Pehkonen (Toim.) Use of open-ended problems on mathematics classroom (s. 7–11). Research report 176. Opettajankoulutuslaitos, Helsingin yliopisto.
- Savola, L. 2008. Video-based analysis of mathematics classroom practice: Examples from Finland and Iceland. Julkaisematon väitöskirja. The Graduate School of Arts and Sciences, Columbia University.
- Shimizu, Y. 1999. Aspects of mathematics teacher education in Japan: Focusing on teachers' roles. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 2, 107–116.
- Stein, M., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. 2008. Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10, 313–340.

- Takahashi, A. 2008. Beyond show and tell: Neriage for teaching through problem-solving - Ideas from Japanese problem-solving approaches for teaching mathematics. Topic Study Group 19: Research and Development in Problem Solving in Mathematics Education. ICME11 - 11th International Congress on Mathematical Education, Meksiko, 2008. Saatavilla osoitteessa <http://tsg.icme11.org/document/get/827>
- Tikkanen, P. 2008. "Helpompaa ja hauskeempaa kuin luulin" Matematiikka suomalaisten ja unkarilaisten perusopetuksen neljäsluokkalaisten kokemana. Jyväskylä studies in education, psychology and social research 337. Jyväskylän yliopisto.
- Ueda, A. 2000. Explanation of the 'open-ended approach' in mathematics class. Teoksessa M. Miheso, C.G. Kanja & T. Baba (Toim.) The Open Ended Approach in Mathematics Education: A First Step Towards Classroom Practice in a Kenyan Setting (s. 3-15). SMASSE Project, Nairobi, Kenia.

ONGELMANRATKAISU OPPILAIDEN KOKEMANA Pirjo Tikkanen

Tulkinnalliset ongelmat ovat tyypillisiä matematiikan Varga – Neményi –menetelmässä perusopetuksen ensimmäisistä kouluvuosista lähtien. Tulkinnallisilla ongelmilla oppilaat tutustutetaan tavoitteelliseen ongelmanratkaisuun. Artikkelissa kuvataan yhden suomalaisen opetusryhmän (N=20 oppilasta) kokemuksia ongelmanratkaisusta. Oppilaat kokevat ongelmanratkaisun myönteisesti, niin ikään heidän minäkäsityksensä ja asenteensa matematiikkaan on myönteinen. Lopuksi oppilaiden kokemuksista kootaan laadukkaan opetuksen piirteitä.

Johdanto

Unkarilaisessa Varga–Neményi –opetusmenetelmässä ovat tyypillisiä tulkinnalliset matemaattiset ongelmat alakoulusta lähtien (Varga 1988; C. Neményi 2010). Tulkinnallisissa ongelmissa yhdistetään tuttuja tietoja uudella tavalla ja voidaan saada yksi tai useita ratkaisuja. Erilaisten tulkintojen oivaltaminen on ensimmäinen askel ongelman tutkimiseen ja ongelman matematisointiin. Ongelmanratkaisun tarkoitus on myös herättää oppilaiden väittelyä ja keksimisen iloa.

Ongelmanratkaisun opettamisessa on kolme tapaa: opetetaan jotain ongelmanratkaisusta, opetetaan ongelmanratkaisua varten ja opetetaan ongelmanratkaisun kautta. Viimeistä käytetään opetusmenetelmänä, josta käytetään tässä yhteydessä lyhyttä nimitystä ”ongelmanratkaisu”. Pehkosen (2000) mukaan ongelmanratkaisu on opetusmenetelmä, jolla voidaan kohdata konstruktivismiin asettamat haasteet oppilaan ymmärtämisen edistämiseksi.

Ongelmanratkaisun rakenne ja toiminnan periaatteet ovat tiivistettävissä seuraavasti: Oppilaita johdatetaan keräämään itsenäisesti ongelmaan liittyvää matemaattista tietoa. Oppilaat analysoivat sitä ja pyrkivät tavoitteellisesti ratkaisemaan ongelman. Lopuksi he arvioivat ongelman ratkaisun tulosta ja ongelmanratkaisuprosessiaan. Vaikka prosessin eteneminen vaikuttaa lineaariselta, se ei kuitenkaan etene käytännössä lineaarisesti, vaan oppilaat saattavat palata takaisin alkutilanteeseen havaittuaan ratkaisun vaiheineen toimimattomaksi. Prosessi toimii erityisen hyvin pitempikestoisissa tutkimuksissa ja projekteissa. Unkarilaisen Polyan (Leppäaho 2007) ongelmanratkaisumallissa on olennaista ymmärtää ongelma, tehdä ja toteuttaa suunnitelma ratkaisuprosessista ja lopuksi arvioida tehtyä. Opetustilanteessa oppilaat saattavat edetä prosessissa yksilöllisesti eli ovat prosessin eri vaiheissa.

Sosiaalinen systeemi ongelmanratkaisussa on vuorovaikutuksellinen. Keskeistä on avoin ilmapiiri, jossa erehtyminen on sallittua, jopa toivottavaa. Opettajan tehtävä on tarkkailla, ohjata ja antaa neuvoja, jos tarvitaan. Hänen on pidättäydyttävä arvioinnista ja annettava tilaa oppilaiden itsearvioinnille. Hänen tehtävänsä muuttuu matemaattisten sisältöjen välittämisestä ajattelu- ja

työskentelytaitojen ohjaamiseen. Pari- ja pienryhmätyöskentely sopivat ongelmaratkaisun työtavoiksi. Ne mahdollistavat kokeilemisen, pohtimisen, arvailemisen ja erehtymisen turvallisesti. Näissä työtavoissa mahdollistuu myös oppilaiden keskinäinen vuorovaikutus enemmän kuin opettajajohtoisissa työtavoissa.

Menetelmän tukisysteemi koostuu sekä oppilas- että opettajatekijöistä. Oppilaan ja opettajan on motivoitettava ongelmasta ja sen ratkaisemisesta. Jotta matemaattinen ongelmanratkaisu onnistuisi ja syntyisi onnistumisen kokemuksia, se vaatii oppilaalta matemaattisia perustaitoja ja lukutaitoa. Sujuva laskutaito, termien, käsitteiden ja teoreemojen hallinta edistävät ongelman ratkaisemista. Tarvitaan myös yleisiä ongelman ratkaisutaitoja, kuten visualisointia, joustavaa ajattelua ja analogioiden muodostamista. Opettajan on luotava myönteinen ja rohkaiseva ilmapiiri, kehitettävä oppilaiden ja omia luovia ja tiedollisia valmiuksiaan sekä parannettava asennoitumista ongelmanratkaisuun.

Jo niin varhain kuin perusopetuksen toisella luokalla oppilaat alkavat muodostaa uskomuksia hyvästä opetuksesta, minkä havaitsivat Murphy, Delli ja Edwards (2004) piirräessään oppilailla luokkahuonetapahtumia, joita toisluokkalaisten kuvasivat suullisestikin vakuuttavasti. Toisluokkalaisten uskomukset ovat ymmärrettäviä, koska alle kouluikäisetkin muodostavat uskomuksia havaintojensa perusteella (Kitchener & King 1995).

Viides- ja kuudesluokkalaisten on näkemys matematiikan opetuksen lähestymistavoista (Sexton 2010). Jotkut oppilaat suosivat behavioristista opetusta, jotkut konstruktivistista, jotkut behavioristisen ja konstruktivisen lähestymistavan yhdistelmää. Sextonin (2010) mukaan behavioristisessa opetuksessa opettaja kertoo ja näyttää, miten ongelmia ratkaistaan, kunnes oppilaat osaavat. Oppilaan tehtävänä on painaa mieleen ongelmanratkaisun säännöt ja harjoitella niitä, kunnes osaa. Opettaja tarkastaa, korjaa virheet ja kertoo tarvittaessa. Konstruktivistisessa opetuksessa oppilaat miettivät ensin ongelmaa itsenäisesti ja kysyvät tarvittaessa. Heillä on tarvittava materiaali käytettävissä. Vaikeudet selvitetään opettajan ja oppilaan keskustelussa. Lopuksi oppilaat esittelevät erilaisia ratkaisutapojaan.

Vuosiluokkien 5–8 oppilailla on selvä näkemys matematiikan oppituntien laadusta (Sullivan, Clarke & O'Shea 2010). Oppilaiden mukaan matematiikan opetus on laadukasta, kun

- eri sisältöalueiden käsitteet selitetään selkeästi
- kokemuksia hankitaan sekä satunnaisilla että strukturoiduilla toimintavälineillä arkielämään liittyvistä aiheista
- sisältöalueet ovat vaihtelevia
- tehtävät ovat haasteellisia ja
- työskennellään ryhmissä

Jos oppilaiden ja opettajan näkemykset matematiikan opetuksesta eroavat, syntyy epistemologinen ristiriita.

Tavoitteena on selvittää, miten perusopetuksen neljäsluokkalaiset kokevat ongelmanratkaisun matematiikassa. Oppilaiden kokemusten perusteella tehdään yhteenveto laadukkaasta matematiikan opetuksesta.

Kuinka oppilaiden kokemuksia ongelmanratkaisusta tutkittiin?

Tämä artikkeli perustuu Matematiikkaa unkarilaisittain -hankkeeseen (Tikkanen 2008). Tutkittavia oppilaita oli Suomesta 41 ja Unkarista 23, yhteensä 64. Tutkittavat oppilaat Suomesta olivat kahdesta eri opetusryhmästä ja Unkarista yhdestä ryhmästä. Unkarilaisryhmässä ja toisessa suomalaisryhmässä käytettiin unkarilaista Varga–Neményi -opetusmenetelmää, jossa suositaan tulkinnallista ongelmanratkaisua.

Oppilaiden kokemuksia matematiikan opetuksesta on selvitetty yleensä kyselylomakkeilla, haastattelemalla tai havainnoimalla. Harvemmin käytettyjä menetelmiä ovat narratiivien kirjoittaminen matematiikkaan liittyvistä kokemuksista (Sullivan ym. 2010; Zan & Martino 2010) tai piirroksot (Murphy ym. 2004). Tässä tutkimuksessa käytettiin oppilaiden piirroksia matematiikan oppitunneista ja kertomuksia aiheesta 'Minä ja matematiikka'.

Sekä piirrosten että kirjoitelmien sisällöt analysoitiin induktiivisesti. Aineiston keskeisiä sisältöjä olivat mm. matematiikan sisällöt, työtavat ja oppilaiden asenne eli suhtautuminen niihin. Tikkanen (2008) kuvaa aineiston analyysia tarkasti tutkimuksessaan.

Oppilaiden narratiivien ja piirrosten pohjalta muodostettiin kokemustyyppit. Kukin tyyppi hahmottui aineiston lähiluennan ja analysoinnin tuloksena. Tyypin hahmottumista auttoi mahdollisuus verrata kolmen opetusryhmän oppilaiden kokemuksia. Tyyppi muotoutui oppilaiden kerrontatavasta ja eniten mainituista matematiikan sisällöistä. Tyyppi abstrahoi yksilöllisiä kokemuksia ja uskomuksia matematiikasta, sen oppimisesta ja opetuksesta, matematiikka-asenteita ja käsityksiä itsestä matematiikan oppijana. Kokemustyyppit ryhmittäytyivät opetusryhmien mukaan. Unkarilaisryhmä on vastakohtaistava yhtälönratkaisija, toinen suomalaisryhmä on toteava laskija ja toinen suomalaisryhmä perusteleva ongelmanratkaisija.

Perustelevan ongelmanratkaisijan tyypilliset piirteet ovat perusteleva kerronta ja matematiikan ongelmanratkaisutehtävien nimittäminen ällitälleiksi ja haasteiksi, joita oppilaat kahdessa muussa ryhmässä eivät käyttäneet. Perustelut ilmenevät koska-, sillä- ja siksi-alkuisista lauseista ja *sen päättelin* -tyyppisistä fraaseista. Perusteluksi ymmärretään myös vertaaminen, joka ilmenee mm. lasten lempiaine-listoissa ja oppiaineiden tärkeysluetteloissa. Perusteluja, ällitällejä ja haasteita on kaikkien tämän ryhmän lasten narratiiveissa. Seuraavassa perustelevan ongelmanratkaisijan kokemustyyppin tarkastelussa edetään joistakin oppilaiden yksilöllisistä kokemuksista oppilaiden näkemyksiin välineistä ja työtavoista. Lopuksi käsitellään tyypin minäkäsitystä ja asennetta matematiikkaan.

Perusteleva ongelmanratkaisija

Perusteleva ongelmanratkaisija on suomalainen perusopetuksen neljännen luokan oppilas, jonka matematiikan oppimista on ohjattu unkarilaisella Varga-Neményi -opetusmenetelmällä. Hän on 9–10-vuotias tyttö tai poika.

Ongelmanratkaisu tarjoaa ällille tälliä: Ällitälli on lasten keksimä nimitys ongelmaratkaisutehtäville, joilla tarkoitetaan tehtäviä, joiden ratkaisutapa on oppilaan oivallettava itse ja ratkaisuja on useampia kuin yksi. Oppilaiden mainitsemia ongelmia ovat mm. lasten asusteiden päättely kuvien perusteella ja lippujen värittäminen, jossa oppilaan oli päätettävä lipun värittävien alueiden ja käytettävien värien määrä. Muita oppilaiden mainitsemia ongelmia ovat wc-paperirullan arkkien määrän selvittäminen rullaa avaamatta ja ison tikkukasan tikkujen määrän selvittäminen kymmenjärjestelmän avulla.

Matematiikan oppitunti oppilaiden mukaan tuntuu hauskalta silloin, kun on ongelmanratkaisua, koska siinä saa miettiä runsaasti. Ongelmatehtäviä pitäisi olla opetuksessa enemmän. Ongelmanratkaisussa oppilasta viehättää useiden ratkaisujen ja ratkaisutapojen etsiminen. Kun ongelma on oppilaasta haasteellinen ja mielekäs, hän on valmis työskentelemään sen parissa sinnikkäästi pitkäänkin. Joukko neljäsluokkalaisia todistaa perustellen omin sanoin, millaista ongelmanratkaisu voi olla:

Amanda: Hauskat asiat niin kuin päättely menevät matematiikassa nopeasti ohi. Pidän päättelytehtävistä ja ongelmista, koska niissä pitää käyttää päätään paljon.

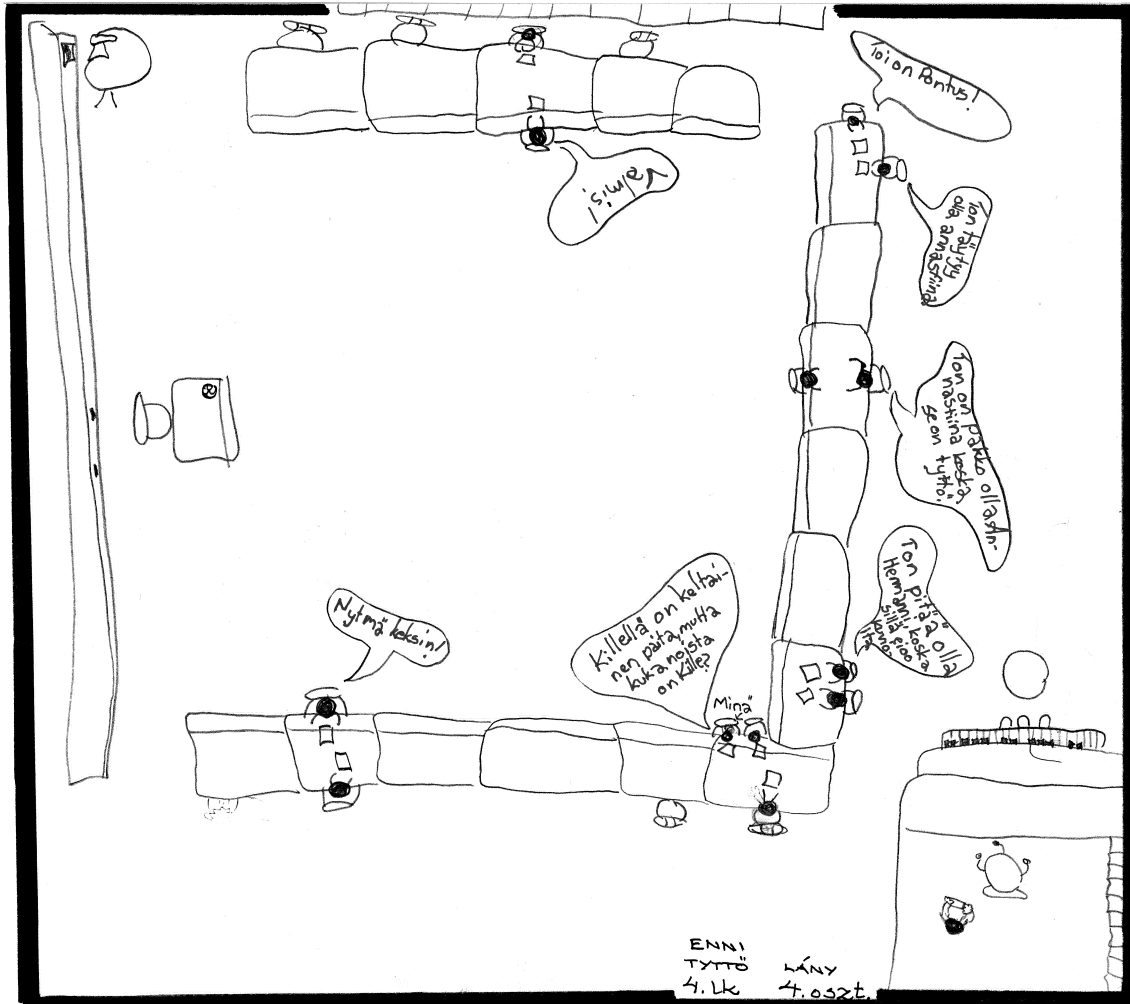
Helmi: Matikan tunnilla on tosi hauskaa, kun ällitällejä (ongelmia) ratkaistaan.

Matti: Matikka on hauskaa, kun on päättelytehtävät. Luvuilla laskeminen ei ole niin hauskaa.

Ongelmanratkaisu on mieleistä, koska se tarjoaa tilaisuuksia ajatella, miettiä ja pohtia. Näissä kognitiivisissa toiminnoissa lapsia viehättää se, että pääsee, joutuu ja tarvitsee käyttää päätä paljon ja kauan. Sinnikästä ajattelua virittelevät ja ruokkivat sellaiset haasteelliset tehtävät, joiden lopputulos ei ole välittömästi havaittavissa, vaan niitä on työstettävä pitkään. Mieleisimmät tehtävät oppilaista ovat päättelyä ja loogista ajattelua vaativat sanalliset ongelmat, joissa oppilaat keksivät ratkaisutavan ilman valmista mallia ja joissa ratkaisuja on useampi kuin yksi. Yksi tällainen oppilaiden mieleiseksi kuvaama tehtävä oli päätellä penkillä istuvien lasten järjestys iän ja istumapaikan avulla. Hauskaa on myös lukujärjestelmien tutkiminen *pussittamalla*, kuten lapset asian ilmaisevat:

Helmi: Matematiikka on hauskaa, koska siinä on tosi kivoja tehtäviä. Hauskaa ovat kertaistukset (kuinka monikertainen), kertolaskut ja pussitukset. Tosi hauskoja ovat lämpötilat ja pussitukset. Matematiikan tunnilla on tosi hauskaa kun ällitällejä

(ongelmia) ratkaistaan. Aika kuluu tosi nopeasti ja olen innostunut matematiikasta, koska on monellaista tekemistä paljon.



Kuvio. Nyt mä keksin!

Pussitus tarkoitti tässä luokkayhteisössä konkreettista toimintaa, jossa esimerkiksi kasa nappeja laitetaan kymmenen kappaleen läpinäkyviin pusseihin, kunnes jäljelle jääviä nappeja on vähemmän kuin kymmenen. Kymmenen napin pussit laitetaan edelleen satapusseihin, joita edelleen kymmenen kappaletta tuhatpusseihin. Nappien pussittamisen jälkeen luetaan tuhat-, sata- ja kymmenpusseista sekä irtonapeista niiden lukumäärä. Näin oppilaalla oli mahdollisuus konkreettisesti havaita kymmenjärjestelmän rakentumisen periaate.

Toimintavälineet: Parityöskentelypiirrosten mukaan matematiikan oppitunneilla käytetään erilaisia toimintavälineitä kuten noppiä, paperiliittimiä, tikkuja, siemeniä, simpukoita, vaakoja ja multilink-palikoita. Oppilailla on mahdollisuus valita parin kanssa tehtävään sopivimmat toimintavälineet.

Työtavat: Useimmin perusteleva ongelmaratkaisija kuvaa piirroksissaan matematiikan oppituntia yhteistoiminnalliseksi ja oppilaskeskeiseksi parityöskentelyksi. Pareittain oppilaat keskustelevalle eri tavoin ratkaistavista ongelmista (ks. kuviota). Parin kanssa tutkitaan myös kalenterista nimipäiviä. Peruslaskutoimituksia harjoitellaan pelaten noppapeliä kaverin kanssa, jolloin voi pelitulosten perusteella ennakoita omia ja kaverin voittomahdollisuuksia. Oppilaat kuvaavat myös yhteistoiminnallista ryhmätyötä 3-5 oppilaan ryhmissä. Tällöin oppilaalla on mahdollisuus keskusteluun luokkakavereiden kanssa tehtävän sisällöstä, toimintavälineistä että niiden herättämistä tunteista. Samalla opitaan sosiaalisia taitoja, kun neuvotellaan tehtävän etenemisestä ja yhteisten toimintavälineiden käytöstä. Silloin kun oppilaat työskentelevät pareittain tai ryhmissä, opettaja kiertää oppilaiden joukossa seuraamassa työn edistymistä ja ohjaamassa apua tarvitsevia tai istuu oman pulpettinsa äärellä kuten oppilaatkin.

Minäkäsitys: *Ongelmanratkaisijan* minäkäsitys matematiikan oppijana on neutraali, varauksellisen myönteinen tai myönteinen. Minäkäsitys perustuu *ongelmanratkaisijan* omiin havaintoihin opiskelutehtävien onnistumisesta, koemenestyksestä ja opettajan antamaan palautteeseen. Hän ei vertaa itseään toisiin oppilaisiin. *Ongelmanratkaisijan* harrastuksiin kuuluu matematiikan-kerho, joka edistää hänen taitojaan, jotka vahvistavat minäkäsitystä. *Ongelmanratkaisija* tekee vapaaehtoisesti laajahkoja kotitehtäviä, joissa esimerkiksi loogisen päättelyn ja puudiagrammin avulla valmistetaan loogiset pelikortit yhteistoimintaa varten.

Perustelevan ongelmanratkaisijan uskomukset matematiikan sisällöistä ovat jokseenkin monipuolisia, koska siihen sisältyvät algebraa lukuun ottamatta luvut laskutoimituksineen, geometria ja mittaaminen, tietojen käsittely, tilastot ja todennäköisyys, logiikka ja erityisesti ongelmanratkaisu. Sitä 9-10-vuotias *ongelmanratkaisija* nimittää ällitälliksi tai haasteeksi. Ällitälli tarkoittaa tehtävää, jonka ratkaisutapa ja ratkaisu eivät ole välittömästi havaittavissa, vaan ne on oivallettava itse. Ratkaisuja ongelmaan on useampi kuin yksi, koska tehtävä on tulkinnallinen.

Matematiikka-asenne: *Ongelmanratkaisija* pitää matematiikasta, koska se tarjoaa tilaisuuksia ajatella, miettiä ja pohtia ja koska se on vaihtelevaa ja monipuolista sisällöltään. Hän pitää myös uusien asioiden ymmärtämisestä ja tajuamisesta. Hän kokee matematiikan kumuloituvan rakenteen myönteisesti, koska aiemmin opitut asiat ovat jatkossakin tarpeellisia. Matematiikan sisällöllinen monipuolisuus mahdollistaa myös monipuoliset ja vaihtelevat tehtävät, jotka ovat *ongelmanratkaisijasta* mieleisiä. Konkreettiset toimintavälineet edistävät symbolien ja abstraktioiden ymmärtämistä ja tuovat myös vaihtelua toimintaan, joka vahvistaa *ongelmanratkaisijan* matematiikka-asennetta. Myönteisen matematiikka-asenteen kehittymiseksi on suotuisaa, jos opetukseen sisältyy tavoitteellista toimintaa konkreettisine lopputuloksineen oppimisen lisäksi.

- 1) Matematiikka on *ongelmanratkaisijalle* tosi tärkeää, tärkeää tai ainakin melko tärkeää. Tosi tärkeää tai tärkeää se on silloin, kun hän on soveltanut sitä omaan elämäänsä. Matematiikka on vain melko tärkeää, kun mahdollisuuksia soveltaa on ollut vähän. Matematiikka on tärkeä oppiaine *ongelmanratkaisijan* koulussa, jossa sitä opiskellaan äidinkielen lisäksi myös ranskan ja englannin kielellä ja myös matematiikkaa opiskellaan vieraiden kielten tunneilla. Matematiikka integroituu myös äidinkielen, ympäristö- ja luonnontiedon sekä käsitöiden opiskeluun. *Ongelmanratkaisijalla* ja matematiikalla on yhteinen tulevaisuus, koska ongelmanratkaisija haaveilee ammatista, jossa matematiikalla on käyttöä. Hän uskoo, että matematiikka kuuluu aikuisena vapaa-aikaankin.
- 2) *Ongelmanratkaisija* kokee matematiikan helpoksi, sopivaksi, helpoksi ja vaikeaksi tai vaikeaksi, minkä hän on päätellyt sekä koemenestyksestään, harjoitustehtävistään että oppimiskokemuksistaan. Jos matematiikan tehtävät ovat liian helppoja, hän tylsistyy. Tylsistyttäviä tehtäviä ovat myös samanlaisina toistuvat harjoitukset, joten ihanteelliset tehtävät ovat sisällöiltään ja ratkaisutavoiltaan vaihtelevia.

Perustelevan ongelmanratkaisijan opetusryhmässä asenne matematiikkaan on yksiselitteisen myönteinen 7:llä, ambivalenttisen myönteinen 12:lla ja ambivalenttisen kielteinen 1 ongelmanratkaisijalla. Yksiselitteisyys on pääteltävissä, kun *ongelmanratkaisijasta* matematiikka on hauskaa, helppoa ja tärkeää. Asenteen ambivalenttisuus on pääteltävissä, kun matematiikka on ongelmanratkaisijasta esimerkiksi kivaa, helppoa ja vaikeaa (ambivalenssi) ja tärkeää. Yksiselitteisen myönteinen asenne matematiikkaan on kahdella tytöllä ja viidellä pojalla, ambivalenttisen myönteinen asenne seitsemällä tytöllä ja viidellä pojalla, ambivalenttisen kielteinen vain yhdellä tytöllä *perustelevan ongelmanratkaisijan* ryhmässä.

Ongelmanratkaisija työskentelee matematiikan oppitunnilla useimmiten yhteistoiminnallisesti ja oppilaskeskeisesti parin kanssa, pienryhmässä tai yksilöllisesti. Nämä työtavat tarjoavat *ongelmanratkaisijalle* merkittäviä kokemuksia oppimisesta, joka hänen mukaansa on ymmärtämistä, tajuamista, keksimistä ja oivaltamista. Merkittävää on myös ajattelu ja työskentely vuorovaikutuksessa luokkakavereiden ja opettajan kanssa haasteellisten ongelmien parissa.

Konkreettiset, jokaisen omakohtaisessa käytössä olevat toimintavälineet havainnollistavat matematiikan sisältöjä ja tarjoavat aktiivista toimintaa *ongelmanratkaisijalle*. Hänestä on tärkeää, että ajoittain on esittävää opetusta, jolloin selitetään, selvennetään ja näytetään konkreettisesti opittavia asioita, koska se aktivoi oppimaan ja ajattelemaan. Kyselevä opetus on ihanteellista, kun sen avulla kootaan tai tarkistetaan pari- tai yksilöllisen työn tuloksia, joista tarkastellaan erilaisia tapoja ratkaista tehtäviä ja tehdään niistä johtopäätöksiä. Kyselyn avulla myös kerrataan opittuja asioita, mutta kyselyn on aktivoitava

haasteelliseen toimintaan, jotta se innostaisi *ongelmanratkaisijaa*. Opettaja-johtoinen kyselevä opetus herättää *ongelmanratkaisijassa* myös epävarmuutta tai ärsyyntymistä luokkakavereihin.

Ongelmanratkaisijan opettajan haasteet matematiikan opetuksen kehittämiseksi ovat seuraavat: Jotta *ongelmanratkaisijan* matematiikkakuva monipuolistuisi, olisi algebran sisältöaluetta käsiteltävä mielikuvia synnyttävällä tavalla, jotta se ilmenisi *ongelmanratkaisijan* kokemuksissakin. *Ongelmanratkaisijalle* olisi tarjottava mahdollisuus opetuskeskusteluun väittelyineen pienryhmää suuremmassa oppilasryhmässä, jotta matemaattinen kielentäminen ja argumentointi kehittyisi. Matematiikan kokeiden olisi syytä olla eriytettyjä matemaattiselta esitysmuodoltaan *ongelmanratkaisijan* edellytysten mukaisesti, jotta ne eivät liian abstraktisina heikentäisi *ongelmanratkaisijan* käsitystä itsestään matematiikan oppijana. Vaikka *ongelmanratkaisijan* käytössä on vapaa- valintaisia toimintavälineitä suhteellisen runsaasti, luokassa olevaa tietokonetta tulisi hyödyntää tehokkaammin työskentelyn eriyttämisessä, samalla tietotekniset taidotkin kehittyvät. Luokan ulkopuolinen työskentely edistäisi *ongelmanratkaisijan* taitoja soveltaa matematiikkaa omaan elämäänsä ja edistäisi näin hänen käsitystään matematiikan tärkeydestä käyttökohteiden rikastuessa. Koska vapaamuotoiset kirjoitelmat ja piirrookset osoittavat *ongelmanratkaisijan* suhteen matematiikkaan emotionaaliseksi, on hänelle jatkossakin annettava mahdollisuus ilmaista tunteensa matematiikasta, sen oppimisesta ja opetuksesta eri tavoin, jotta voitaisiin havaita mahdolliset muutokset negatiiviseen suuntaan ja vahvistaa myönteistä suhdetta matematiikkaan.

Yhteenveto

Tutkimuksen tavoitteena oli selvittää neljäsluokkalaisten kokemuksia tulkinnallisista matematiikan ongelmista. Oppilaat kokevat ongelmanratkaisun myönteisesti. Merkittäviä myönteisen kokemuksen synnyttäjiä ovat haasteelliset tehtävät, välineet ja vuorovaikutteiset työtavat. Myönteisillä ongelmaratkaisun kokemuksilla vaikuttaa olevan myönteisiä seurauksia – oppilaiden minäkäsitys ja asenne matematiikkaan ovat myönteisiä. Näiden myönteisten kokemusten perusteella on koottavissa laadukkaana matematiikan opetuksen piirteet.

Laadukkaassa matematiikan opetuksessa

- on haasteellista ongelmanratkaisua
- kokemuksia matematiikasta hankitaan sekä satunnaisilla että strukturoiduilla toimintavälineillä
- työtavat ovat vuorovaikutteisia ja yhteistoiminnallisia

Perustelevan ongelmanratkaisijan kokemuksissa matematiikasta on samoja piirteitä kuin viides- ja kahdeksaluokkalaisten näkemyksissä tehokkaasta matematiikan opetuksesta (Sullivan ym. 2010). Perusopetuksen neljäsluokkalaiset, joita on opetettu Varga–Neményi -opetusmenetelmällä,

ovat oppimisensa asiantuntijoina tarjonneet realistisia suosituksia matematiikan opetuksesta.

Lähteet

- C. Neményi, E. 2010. Luova ajattelu ja toiminta. Teoksessa P. Tikkanen (toim.) YHDESSÄ! Varga–Neményi -yhdistyksen 5-vuotisjuhlakirja. Espoo: Varga–Neményi ry, 30–52.
- Kitchener, K. S. & King, P. 1995. Reflektiivisen pohdinnan malli: Tietämistä koskevien oletusten muuttaminen. Teoksessa J. Mezirow ym. Uudistava oppiminen. Kriittinen reflektio aikuiskoulutuksessa. Helsingin yliopisto. Lahden tutkimus- ja koulutuskeskus, 179–197.
- Leppäaho, H. 2007. Matemaattisen ongelmaratkaisutaidon opettaminen peruskoulussa. Ongelmaratkaisukurssin kehittäminen ja arviointi. Jyväskylä Studies in Education, Psychology and Social Research 298.
- Murphy, P. K., Delli, L. A. M. & Edwards, M. N. 2004. The good teacher and good teaching: Comparing beliefs of second-grade students, preservice teachers, and inservice teachers. *The Journal of Experimental Education* 72 (2), 69–92.
- Pehkonen, E. 2000. Ymmärtäminen matematiikan opetuksessa. *Kasvatus* 31 (4), 375–381.
- Tikkanen, P. 2008. "Helpompaa ja hausempaa kuin luulin" Matematiikka suomalaisten ja unkarilaisten perusopetuksen neljäsluokkalaisten kokemana. *Jyväskylä Studies in Education, Psychology and Social Research* 337.
- Sexton, M. 2010. Using concept cartoons to access student beliefs about preferred approaches to mathematics learning and teaching. In L. Sparrow, B. Kissane, & C. Hurst (Eds.) *Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd annual conference of the mathematics education research group of Australasia*. Fremantle: MERGA, 515–522.
- Sullivan, P., Clarke, D. & O'Shea, H. 2010. Students' opinions about characteristics of their desired mathematics lessons. In L. Sparrow, B. Kissane, & C. Hurst (Eds.) *Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd annual conference of the mathematics education research group of Australasia*. Fremantle: MERGA, 531–538.

”NE ON VAIHTELEVIA LUKUJA.”
MUUTTUJAT VIIDESLUOKKALAISTEN MATEMATIIKASSA
Pro gradu -tutkielma
Minna Muje

Johdanto

Tässä tutkielmassa selvitetään viidesluokkalaisten muuttujien käsittelyä matematiikassa. Muuttujat liittyvät algebraan, ”kirjainlaskentaan”, joka on matematiikan osa-alue. Algebrassa käsitellään lukujen ohella yhtä tai useampaa tuntematonta lukua eli muuttujaa, jota kuvataan yleensä kirjainsymbolilla, kun taas aritmetiikka keskittyy pelkästään tunnettujen lukujen käsittelyyn (Christou & Vosniadou 2005; Hassinen 2006; Humberstone & Reeve 2008). Varsinaisesta algebrasta voidaan erottaa esialgebra, joka on välivaihe siirryttäessä aritmetiikasta algebraan (Linchevski 1995).

Siirtymävaihe aritmetiikasta algebraan on matematiikan opetuksen kannalta oleellinen, sillä algebra vaatii oppilaalta numerolaskuja enemmän abstraktia ajattelua (Hihnala 2005). Algebraa pidetään matematiikassa tärkeänä alueena, mutta sen on todettu olevan oppilaille hankalaa. Kuitenkin algebran varhaisesta opetuksesta 8–9-vuotialle oppilaille on saatu rohkaisevia tuloksia. (Carpenter & Levi 2000; Duke & Graham 2007; Kieran 1991; MacGregor & Stacey 1997; Schliemann, Carraher, Brizuela & Jones 1998; Warren & Cooper 2005.) Oppilaiden vaikeudet algebrassa yläluokilla, toisaalta onnistuneet kokeilut opettaa algebraa alaluokilla osoittavat, että algebrallisen ajattelun opettamista alaluokilla tulisi vakavasti harkita. Tällainen muutos vaatii tutkimusta ja asiaan perehtymistä. (Schliemann ym. 1998.) Lisäksi tarvitsemme tietoa oppilaiden ennakkokäsityksistä ja virheellisistä ajattelutavoista algebrassa. Konstruktivismiin hengessä oppilaiden aiemmat tiedot ja käsitykset on huomioitava opetuksessa, näihin ennakkokäsityksiin tulisi myös matematiikan opetuksen vaikuttaa. Algebran oppimista helpottavat mm. muuttujien merkitseminen, käsitys muuttujasta vielä tuntemattomana lukuna ja tuntemattomien lukujen ratkaiseminen (Carpenter & Levi 2000; Duke & Graham 2007; Schliemann ym. 1998). Näihin seikkoihin perustuvat tämän tutkielman ongelmat. Lisäksi selvitetään yleisiä virhetyyppejä, joita esiintyy oppilaiden ratkaistessa muuttujia sisältäviä tehtäviä, ja ohjauksen vaikutusta oppilaiden muuttujien käsittelyyn.

Algebran opettamisen haasteellisuus

Algebran opetus on haasteellista, koska virhekäsitykset algebrasta ovat pysyviä ja hankalasti muutettavissa (Christou, Vosniadou & Vamvakoussi 2007; Merenluoto & Lehtinen 2004). Väärinkäsitykset ja virheelliset tulkinnat ovat peräisin aiemmista kokemuksista, jotka vaikeuttavat algebran oppimista

(Stacey & MacGregor 1997). Oppilaiden kokemukset luvuista aritmetiikassa vaikuttavat voimakkaasti siihen, kuinka oppilaat tulkitsevat symboleita algebrassa. Algebran opetuksen alkaessa oppilailla on kaksi haastetta: heidän on annettava merkitys uusille symboleille ja uusi merkitys aritmetiikasta tutuille symboleille. (Christou ym. 2007.) Oppilaille on epäselvää, että esimerkiksi merkintä $5x$ tarkoittaa 5 kertaa x , eikä yhteenlaskua tai paikkalukua (Stacey & MacGregor 1997). Jos oppilaan on sijoitettava $y:n$ paikalle 3 lausekkeeseen $2y$, oppilas saattaa vastata virheellisesti 23 (Christou ym. 2007; Hassinen 2006).

Aritmetiikassa oppilaat tottuvat tietynlaisten lukujen käsittelyyn. Monet oppilaat ovat operoineet lähinnä pienillä kokonaisluvuilla, joten he ovat epävarmoja, toimivatko opitut asiat suurilla luvuilla, desimaaliluvuilla tai murtoluvuilla. Esimerkiksi desimaalilukuja sisältävä yhtälö saattaa tuottaa oppilaille vaikeuksia, vaikka yhtälön kokonaisluvuilla he ratkaisevat helposti. (MacGregor & Stacey 1999.) Oppilaat voivat tulkita kirjainsymbolit vain luonnollisiksi luvuiksi eivätkä rationaali- tai desimaaliluvuiksi, mikä haittaa algebrallisen ajattelun kehitystä. Myös negatiiviset luvut algebrassa ovat hankalia. Tyypillisesti oppilaat ajattelevat, että esimerkiksi a ei voi saada negatiivisia arvoja ja vastaavasti $-b$ positiivisia arvoja. (Christou & Vosniadou 2005).

Aritmetiikassa luonnollisilla luvuilla on järjestys, kun taas algebrassa symboleille ei määritetä järjestystä esimerkiksi aakkosten mukaan. (Christou & Vosniadou 2005; Christou ym. 2007). Tästä erosta seuraa, että jotkut oppilaat mieltävät virheellisesti kirjainsymbolin sen järjestyslukuna aakkosissa. Esimerkiksi h-kirjaimelle annetaan arvo 8, sillä se on aakkosten kahdeksas kirjain (Küchemann 1981).

Myös aritmetiikasta omaksuttu puutteellinen käsitys yhtäsuuruudesta hankaloittaa algebran oppimista. Aritmetiikasta oppilaat omaksuvat algebran kannalta ongelmallisen rakenteen, jossa operaatiot ovat yhtälön vasemmalla puolella, ja vastaus oikealla puolella. Tästä seuraa, että oppilaat suorittavat laskutoimituksen kaikilla tehtävän luvuilla ja kirjoittavat vastauksen tyhjäan ruutuun, kuten tehtävässä $2 + 3 + 4 + 5 = _$ (Carpenter & Levi 2000; MacGregor & Stacey 1999; McNeil & Alibali 2005; Knuth, Alibali, Hattikudur, McNeil & Stephens 2008; Stacey & MacGregor 1997). Strategian rajallisuudesta raportoi esimerkiksi Hihnala (2005): kun eräässä tutkimuksessa 6.-luokkalaisilta kysyttiin tehtävän $8 + 4 = [] + 5$ ratkaisua, oppilaat vastasivat 12 tai 17, eikä yksikään ratkaissut tehtävää oikein. Siten yhtäsuuruusmerkin huoleton käyttö aritmetiikassa saa oppilaat luulemaan, että yhtäsuuruusmerkki tarkoittaa "saadaan", "tulos on" tai "tästä tulee". Luulo on ongelmallinen, kun vuosia kestäneestä aritmetiikan opetuksesta siirrytään algebran opetukseen (Hassinen 2006; Knuth ym. 2008; MacGregor & Stacey 1999; Schliemann ym. 1998). Tavallisesti oppilaat ketjuttavat laskulausekkeita yhtäsuuruusmerkeillä, kuten $2 + 3 = 5 - 1 = 4$ (Hihnala 2005; Knuth ym. 2008).

Aritmeettisiin tehtäviin on usein numeerinen ratkaisu, kun taas algebran keskeinen idea on muuttujien kuvaaminen kirjainsymbolein ja laskutoimitusten

suorittaminen niillä. Oppilaille on vierasta, että vaikka itse laskutoimitus merkitään, vastaukseksi ei aina saada lukua. (Hassinen 2006.) Tällöin tehtävä on oppilaasta keskeneräinen tai puutteellinen. Oppilaille onkin tyypillistä antaa numeerinen arvo muuttujalle tai lausekkeelle (Küchemann 1981).

Algebran opetuksen alkaessa oppilaiden on muodostettava käsitys tämän matematiikan osa-alueen keskeisistä ideoista, joista yksi on tuntemattoman luvun esittäminen symbolina (Kieran 1992). Kirjainten käyttö tuntemattoman luvun merkitsemiseksi on vaikeaa aloitteleville algebran opiskelijoille (Kieran 1991). Oppilaista on hankalaa operoida tuntemattomalla luvulla. He haluavat tietää luvun tai arvaavat sen. Esimerkiksi Hihnalan (2005) tutkimuksessa 6.-9.-luokkalaisten 28,1 % korvasi muuttujan numeroluvulla suorakulmion alan lausekkeessa (Hihnala 2005). Oppilaat mieluummin ratkaisevat tehtävän mielessään pohtimalla kuin symboleilla (Schliemann ym. 1998). He pyrkivät laskemaan, vaikka tarvitsisi vain merkitä. Aluksi oppilaat jopa pyrkivät välttämään symbolisia ilmauksia. (Hassinen 2006.)

Kolmasluokkalaiset ja sitä nuoremmatkin saattavat kehittää tuntemattomien lukumäärien merkintätavan joko ohjatusti tai spontaanisti. Oppilaat merkitsevät muuttujaa esimerkiksi kuviolla tai kysymysmerkillä. (Carpenter & Levi 2000; Schliemann ym. 1998; Warren & Cooper 2005.) Astetta edistyneempi tapa on ilmaista muuttuja lyhenteellä, sanalla tai useammalla sanalla. Hassisen (2006) mukaan tämä keino on 7.-luokkalaisten keskuudessa yleinen, ennen kuin symbolin merkitsemiseen ohjataan. Edistyneimpänä tapana merkitä muuttujaa pidetään kirjainsymbolia. Sen käyttö ei ole algebraa opiskelleillekaan selvää (MacGregor & Stacey 1997; Hihnala 2005).

Toinen algebran oppimisen keskeisimmistä ongelmakohdista on merkityksen antaminen muuttujien symboleille (Malisani & Spagnolo 2009). Käsitys muuttujan symbolista on monille epäselvää algebran opetuksen jälkeenkin. Monet oppilaat läpäisevät algebran kurssin tajuamatta, että esimerkiksi x voi merkitä toistaiseksi tuntematonta lukua, yleistettyä lukua tai muuttujaa (Duke & Graham 2007; Stacey & MacGregor 1997).

Kolmas algebran keskeinen idea on muuttujia sisältävien tehtävien ratkaiseminen. Luokilla 3-5 matematiikassa on yhtälöiden ja epäyhtälöiden ratkaiseminen päättelemällä (Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet POPS 2004). Lisäksi oppilaat lienevät kohdanneet tuntemattomia lukumääriä jo ennen kolmattakin luokkaa avoimissa tehtävissä, kuten $\square + 5 = 8$ (Kieran 1991). Yhtälöiden ratkaiseminen ei vaikuta olevan oppilaille ylitsepääsemätön haaste (Schliemann ym. 1998). Toisaalta suomalaisnuorilla on havaittu ongelmia algebrassa juuri perusyhtälöiden ratkaisemisessa (Kupari & Törnroos 2004).

Menetelmä

Tutkielman tavoitteena oli selvittää viidesluokkalaisten muuttujien käsittelyä ja ohjauksen vaikutusta oppilaiden muuttujien käsittelyyn matematiikassa. Tutkimuksen pää- ja osaongelmat ovat

- 1 Miten viidesluokkalaiset käsittelevät muuttujia matematiikassa?
 - 1.1 Kuinka oppilaat merkitsevät muuttujan?
 - 1.2 Millainen käsitys oppilailla on muuttujaa merkitsevästä symbolista?
 - 1.3 Miten oppilaat ratkaisevat tuntemattomia lukuja sisältäviä tehtäviä?
 - 1.4 Millaisia virhetyyppejä on oppilaiden muuttujia sisältävissä tehtävissä?

- 2 Miten ohjaus vaikuttaa oppilaiden muuttujien käsittelyyn matematiikassa?

Tutkimukseen osallistui 62 viidesluokkalaista, 35 tyttöä ja 27 poikaa. He olivat kolmesta rinnakkaisluokasta samasta keskisuomalaisesta kaupunki-koulusta. Viidesluokkalaiset valittiin, sillä heille varsinainen algebran opetus on alkamassa. Viidesluokkalaisen tulisi osata ratkaista yhtälöitä ja epäyhtälöitä päättelemällä, mutta laajemmin algebraa käsitellään vasta 6.-9.-luokilla (POPS 2004). Silloin oppilaat tutustuvat muuttujan käsitteeseen.

Tutkimusaineisto kerättiin keväällä 2010 kolmella eri lomakkeella. Ensimmäinen lomake oli RMAT- laskutaidon testi 9-12-vuotiaille (Räsänen 2004), jossa on oppilaille tuttuja peruslaskutoimituksia. Siitä poistettiin viimeinen, muuttujia sisältävä tehtävä, jotta se ei ohjaisi oppilaiden ajattelua seuraavissa lomakkeissa. RMAT-testin tarkoituksena oli antaa luotettava kuva oppilaiden osaamisesta, jonka perusteella heidät jaettiin tasoryhmiin. Toinen lomake selvitti oppilaiden muuttujien esittämistä. Tehtävä 1 muokattiin Stacey'n ja MacGregorin (1997) sekä Hihnalan (2005) käyttämän tehtävän pohjalta, tehtävä 2 on sen kanssa samankaltainen. Tehtävä 3 perustui Hassisen (2006) tutkimukseen.

Viimeinen lomake selvitti oppilaiden käsityksiä muuttujan symbolista ja tuntemattomia lukuja sisältävien tehtävien ratkaisemista. Osa viimeisen lomakkeen tehtävistä muokattiin Hassisen (2006) esittämien Küchemannin teorian esimerkkien mukaan. Lomakkeiden 1 ja 2 kysymykset esitetään taulukossa 1. Lomakkeet esitettiin kandidaatin työssä.

Sekä alkutesti että lomakkeet 1 ja 2 tehtiin yhden oppitunnin aikana. Kaikki oppilaat tekivät kutakin tehtäväsarjaa annetun ajan, jonka jälkeen tehtäväsarja kerättiin pois ja siirryttiin seuraavaan. Ohje annettiin aina suullisesti, ja kirjallisena se toistui tehtäväsarjojen alussa. Lomakkeista määritettiin oppilaiden osaamistaso.

Eritasoisesti menestyneitä oppilaita (5 tyttöä ja 4 poikaa) haastateltiin. Haastattelut kestivät 12-28 minuuttia. Haastattelujen tarkoituksena oli tarkentaa ja syventää tietoa oppilaiden ajattelusta. Haastattelun tavoitteena oli myös selvittää, miten haastattelijan tuki vaikuttaa oppilaiden ajatteluun. Haastattelu testattiin yhdellä oppilaalla.

Taulukko 1. Lomakkeiden 1 ja 2 kysymykset

Lomake 1: Muuttujan merkitseminen			
1. Miten merkitsisit matematiikan kielellä Jaakon pituuden, kun Jaakko on 10 cm pidempi kuin Kalle?			
2. Miten merkitsisit matematiikan kielellä Siljan karkkien määrän, kun hänellä on pussillinen karkkia ja hän syö karkeistaan viisi?			
3. Merkitse tuntematonta lukua haluamallasi tavalla. _____			
Merkitse: Lukuun lisätään 7. _____			
Saatu tulos kerrotaan kahdella. _____			
Saadusta tuloksesta vähennetään 4. _____			
Saadusta tuloksesta vähennetään alkuperäinen luku. _____			
Lomake 2: Käsitys muuttujasta ja tuntemattomia lukuja sisältävien tehtävien ratkaiseminen			
1. Mitä mielestäsi x voisi tarkoittaa tehtävässä $x + 6 = 11$? Mitä tehtävässä pitää tehdä?			
2. Mitä mielestäsi $10y$ voisi tarkoittaa? Perustele vastauksesi.			
3. Mitä mielestäsi $8a$ voisi tarkoittaa? Perustele vastauksesi.			
4. Mitä mielestäsi $2a + 3b$ voisi tarkoittaa? Mitä a voisi tarkoittaa? Entä b ? Perustele vastauksesi.			
5. Selvitä d seuraavissa tehtävissä:			
$5 + d = 12$	$2 = 1 + d$	$17 = d - 2$	$12 = d \cdot 3$
$d =$	$d =$	$d =$	$d =$
$d + d = 4$	$d - 3 = 5$	$5 = 9 - d$	$d / 2 = 8$
$d =$	$d =$	$d =$	$d =$
$10 = d + 5$	$9 - d = 6$	$2 \cdot d = 16$	$2 \cdot d = 4 + d$
$d =$	$d =$	$d =$	$d =$
6. Jos $2x + 3y = 12$, mitä osaat sanoa x :stä? Entä y :stä? Kerro kaikki mitä osaat sanoa! Perustele vastauksesi.			
7. Jos $c + d < 10$ ja $c < d$, mitä osaat sanoa d :stä? Kerro kaikki mitä siitä voit sanoa! Perustele vastauksesi!			

Aineisto analysoitiin sekä määrällisesti että laadullisesti. RMAT-testin menestyksen perusteella oppilaat jaettiin heikkoihin, keskitasoisiin ja taitaviin. Jatkossa oppilaiden matemaattisella osaamistasolla viitataan juuri tähän jakoon.

Küchemann (1981) luokitteli paljon viitatussa teoriassaan oppilaiden symbolien tulkinnat kuuteen ryhmään. Luokitus etenee tasoittain kohti syvällisempää ymmärrystä tuntemattomasta. Ensimmäisellä tasolla symbolille haetaan numeerista arvoa, kuten tehtävässä " $a + 5 = 8$, $a = ?$ " Toisella tasolla symbolia ei käytetä, se jätetään huomiotta tai sille ei anneta merkitystä. Kolmanneksi kirjain voidaan käsittää konkreettiseksi objektiksi tai sellaisen lyhenteeksi. (Küchemann 1981.) Tällöin esimerkiksi $2a + 5a = 7a$ voisi tarkoittaa "Kun kahteen omena lisätään viisi omenaa, saadaan 7 omenaa" (Hassinen 2006). Objektitulkinta voi johtaa käsitteellisiin ongelmiin. Jos b tarkoittaa banaaneja, niin $6b$ tarkoittaa kuutta banaania, eikä kuutta kertaa tuntematonta määrää banaaneja. Sen sijaan, että opetetaan symbolin tarkoittavan jotakin objektia, olisikin hyödyllisempää opettaa sen tarkoittavan jotakin määrää objekteja. (Küchemann 1981.)

Neljännellä tasolla kirjain käsitetään yhdeksi tuntemattomaksi luvuksi. Käsitys voi ilmetä esimerkiksi tehtävässä "Lisää 4 lausekkeeseen $3n$ ". Haasteena on hyväksyä, että vastaukseksi todella riittää $3n + 4$ eikä enempää voida tehdä. Viidenneksi kirjaimen ajatellaan edustavan useita arvoja tai ainakin sen ymmärretään voivan saada useamman kuin yhden arvon. Tällainen

käsitys muuttujasta voi ilmetä esimerkiksi tehtävässä ”Mitä voit sanoa d :stä, jos $c + d < 10$ ja $c < d$? Luokituksen ylimmällä tasolla kirjain edustaa tuntemattomien arvojen joukkoa, ja siihen liitetään systemaattisuutta. (Küchemann 1981.) Tällä tasolla ei riitä, että oppilas ajattelee symbolien saavan useita arvoja, vaan muuttujatulkinta vaatii myös lukujen keskinäisten suhteiden tarkastelua eli käsitystä riippuvuudesta (Hassinen 2006).

Oppilaiden merkitsemistavat luokiteltiin symbolisiin ja ei-symbolisiin tapoihin. Ei-symbolisista merkitsemistavoista erottuivat luokat piirros ja sijoitus, jossa muuttujan paikalla on luku. Symbolisiksi merkitsemistavoiksi luokiteltiin muuttujan merkitseminen kuviolla ja objektilla, (sanalla tai lyhenteellä), kysymysmerkillä ja kirjaimella. Merkitsemistapojen luokittelun jälkeen kullekin oppilaalle määritettiin symbolin merkitsemisen taso. Taso määräytyi oppilaan edistyneimmän merkitsemistavan mukaan. Ei-symboliset merkitsemistavat päätyivät tällöin luokkaan ”ei käsitystä symbolista” ja symboliset tavat omiin luokkiinsa. Oppilaiden käsitykset muuttujasta ja tuntemattomien lukumäärien ratkaisemista analysoitiin Küchemannin luokitusta käyttäen. Symbolin tulkintatapojen analysoimisen jälkeen määritettiin oppilaiden symbolien tulkinnan tasot. Oppilaan taso määräytyi edistyneimmän käsityksen mukaan. Molemmista lomakkeista eriteltiin tyypillisiä virheitä muuttujien käsittelyssä.

Tulokset

Tavoitteena oli selvittää viidesluokkalaisten muuttujien käsittelyä ja ohjauksen vaikutusta oppilaiden muuttujien käsittelyyn matematiikassa. Tutkimuksen pääongelmaa muuttujien käsittelystä selvitettiin kolmella osaongelmalla: 1) Miten oppilaat merkitsevät muuttujia? 2) Millainen käsitys oppilailla on muuttujaa merkitsevistä symbolista? 3) Miten oppilaat ratkaisevat tuntemattomia lukuja sisältäviä tehtäviä? Tulokset käsitellään osaongelmien mukaisessa järjestyksessä.

Muuttujien merkitseminen: Oppilaiden merkitsemistavat luokiteltiin ei-symbolisiin ja symbolisiin merkitsemistapoihin, joista erottui kuusi luokkaa. Ei-symbolisia merkitsemistapoja ovat piirros, jossa tilanteesta on tehty kuva, ja sijoitus, jossa muuttujan paikalla on luku. Symbolisia merkitsemistapoja on neljä: symbolin merkitseminen jollakin kuviolla, objektina, kysymysmerkillä tai kirjaimella. Kuvioissa 1–3 on esimerkkejä oppilaiden symbolisista merkitsemistavoista tehtävässä ”Miten merkitsisit matematiikan kielellä Siljan karkkien määrän, kun hänellä on pussillinen karkkia ja hän syö karkeistaan viisi?”.

Pussillinen - 5



Kuvio 1. Esimerkki objekti- ja kuviomerkinästä

? - 5 kirjain

Kuvio 2. Esimerkki kysymysmerkin käytöstä

X - 5

Kuvio 3. Esimerkki kirjainmerkinnästä

Yleisin ei-symbolinen merkitsemistapa on sijoitus, jota käyttää edistyneimpänä merkitsemistapanaan 41,9 % oppilaista. Symbolisista merkitsemistavoista käytetyin on kirjain, jolla muuttujaa merkitsee 25,8 % oppilaista. Oppilaiden tavat merkitä muuttujaa esitetään taulukossa 2.

Taulukko 2. Oppilaiden tavat merkitä muuttujaa lausekkeessa (n = 62)

Merkitsemistapa	f	%
Ei kykyä merkitä muuttujaa	1	1,6
Ei-symbolinen merkitsemistapa: piirros	3	4,8
Ei-symbolinen merkitsemistapa: sijoitus	26	41,9
Symbolinen merkitsemistapa: kuvio	7	11,3
Symbolinen merkitsemistapa: objekti	5	8,1
Symbolinen merkitsemistapa: kysymysmerkki	4	6,5
Symbolinen merkitsemistapa: kirjain	16	25,8
Yhteensä	62	100,0

Hieman yli puolet oppilaista kuvaa muuttujan jollakin symbolilla, joista yleisin on kirjainmerkintä (25,8 %). Vastaavasti hieman alle puolet, 48,4 % ei merkitse muuttujaa symbolisesti. Oppilaiden merkintätavat ovat taulukossa 3. Muuttujan merkitseminen on tilastollisesti merkitsevästi yhteydessä tuntemattomia lukuja sisältävien tehtävien ratkaisemiseen ($\chi^2(4) = 11,88$, $p = 0,02$). Erot keskiarvoissa ovat tosin pieniä. Heikoiten tuntemattomia lukuja sisältäviä tehtäviä ratkaisevat oppilaat, joilla eivät merkitse muuttujaa.

Taulukko 3. Oppilaiden muuttujien merkintätavat lausekkeessa (n = 62)

Merkitseminen	f	%
Ei merkitty tuntematonta lukua	30	48,4
Kuvio	7	11,3
Objekti	5	8,1
Kysymysmerkki	4	6,5
Kirjain	16	25,8
Yhteensä	62	100,0

Oppilaiden käsitykset muuttujan symbolista: Oppilaiden symbolien tulkintatavat jaettiin Küchemannin luokituksen kuuteen luokkaan. Kullekin oppilaalle määritettiin symbolintulkintataso edistyneimmän tulkinnan mukaan. Oppilaiden symbolien tulkitsemistasot ovat taulukossa 4. Luokkia 'symboli eliminoitavana' (taso 2) ja 'symboli systemaattisena muuttujana' (taso 6) ei tässä aineistossa esiinny. Kaikilla oppilailla on jonkinlainen käsitys symbolista. Suurin osa, 48,4 %, oppilaista käsittää symbolin arvoksi. Toiseksi yleisin tulkintatapa on symboli tuntemattomana lukuna (22,6 %). Edistynein käsitys symbolista on sen käsittäminen monia arvoja saavaksi muuttujaksi, kuten 21,0 % oppilaista ajattelee. Vähiten esiintyy symbolin tulkitsemista objektiksi (8,1 %).

Taulukko 4. Oppilaiden (n= 62) symbolien tulkitsemistasot (n = 62)

Tulkinta symbolista	f	%
Symboli arvona (taso 1)	30	48,4
Symboli objektina (taso 3)	5	8,1
Symboli tuntemattomana lukuna (taso 4)	14	22,6
Symboli yleisenä lukuna (taso 5)	13	21,0
Yhteensä	62	100,0

Symbolin tulkinnat ovat yhteydessä muuttujien merkitsemiseen ($\chi^2(3) = 9,79$, $p = 0,02$). Symbolin tuntemattomaksi luvuksi käsittäneet menestyvät parhaiten muuttujan merkitsemisessä. Heikoiden menestyvät symbolin objektiksi käsittäneet. Edistyneimmin symbolin tulkinneet menestyvät merkitsemisessä heikommin kuin symbolin tuntemattomaksi luvuksi tulkinneet. Symbolien tulkitsemistasossa on tilastollisesti merkitsevä ero sukupuolten välillä ($U = 318,50$, $p = 0,02$). Tytöt menestyvät symbolin tulkitsemisessä hieman poikia paremmin. Tyttöjen tulkitsemistasojen keskiarvo on 3,1 ja poikien 2,1.

Tuntemattomia lukuja sisältävien tehtävien ratkaisemisessa oppilaat menestyvät hyvin. Kaikki tutkittavat löysivät tuntemattomalle luvulle oikean arvon. Oppilaat ratkaisivat 12 yhtälöstä keskimäärin 10,3 tehtävää oikein

keskihajonnan ollessa 1,8. RMAT-testimenestys vaikuttaa tuntemattomia lukuja sisältävien tehtävien ratkaisemiseen tilastollisesti merkitsevästi ($\chi^2(2) = 8,59$, $p = 0,01$). Mitä taitavampi oppilas on matematiikassa, sitä paremmin hän ratkaisee tuntemattomia lukuja sisältäviä tehtäviä.

Virhetyypit oppilaiden muuttujien käsittelyssä: Melko tyypillistä tuntemattoman luvun merkitsemisessä on, että vaikka oppilas osaa merkitä tuntemattoman luvun symbolilla, hän ei myöhemmin käsittele sitä osana lauseketta, vaan sijoittaa sen paikalle konkreettisen luvun. Näin toimii oppilaista 14,5 % ($f = 9$). Toiseksi yleisin virhe on ajatella saman symbolin samassa tehtävässä merkitsevän kahta eri lukua, kuten oppilaista 11,3 % ($f = 7$) tekee. On tavallista, että tuntematonta lukua merkitään x :llä, kuten myös saatua tulosta.

Oppilaista 6,5 % ($f = 4$) ymmärtää symbolin liittyvän paikkajärjestelmään, jolloin esimerkiksi $2a$:n ajatellaan tarkoittavan lukua 23, kun $a = 3$. Tähän liittyy myös käsitys siitä, että esimerkiksi x ei voi tarkoittaa moninumeroista lukua, kuten yksi haastateltava esittää: *"Se voi olla periaatteessa vain yhdeksään saakka, koska siinä on vain yksi luku. Jos siinä olisi vaikka y ja x , niin sitten se voisi vaikka olla 16."* Kaksi oppilasta liittyy symbolin arvon sen järjestyslukuun aakkosissa. Toisaalta oppilaat määrittävät symbolin arvon myös lukusanan alkuäänteen perusteella. Esimerkiksi y voi olla yksi tai yhdeksän tai mikä tahansa muu y -kirjaimella alkava luku. Tätä tulkintaa esiintyy tutkituista 8,1 %:lla ($f = 5$).

Jotkut oppilaat hapuilevat eri symboleille sopivien arvojen kanssa. Oppilaan mukaan a :n ja b :n tai x :n ja y :n tulisi olla eri lukuja. Tiukimman tulkinnan mukaan a :n olisi oltava b :tä pienempi, mikä lienee peräisin aakkosjärjestyksestä. Eräs oppilas rajoittaa tuntemattoman luvun sopivia arvoja lausekkeen tunnetun luvun perusteella: *" $8a$ voi tarkoittaa jotain muuta lukua kuin 8"*. Lisäksi oppilailla on taipumus rajoittua luonnollisiin lukuihin määrittäessään arvoja symbolille. Hyvin harva oppilas antaa tuntemattomalle luvulle muita arvoja kuin luonnollisia lukuja, vaikka se olisi luontevaa. Monien oppilaiden on hankalaa hyväksyä, ettei saada numeerista vastausta. Heille algebrallinen lauseke ei riitä vastaukseksi. Kaksi oppilasta ei ymmärrä täysin yhtäsuuruuden merkitystä.

Toisen pääongelman tavoitteena oli selvittää, miten ohjaus vaikuttaa oppilaiden muuttujien käsittelyyn. Ongelmaa selvitettiin haastatteluilla. Kaikki oppilaat kehittivät muuttujan merkitsemistapaansa joko itsenäisesti tai haastattelijan ohjaamana. Haastattelijan ohjausta suurin osa sovelsi itsenäisesti uudessa merkitsemistavassa seuraavissa tehtävissä. Haastatteluissa kaikkien oppilaiden käsitys muuttujasta on korkeampi kuin lomakkeessa. Usein lisäkysymykset paljastivat, että oppilaan kirjallinen vastaus ei vastaa todellista ajattelun tasoa, vaan viittaa alempaan tasoon. Yhtä oppilasta lukuun ottamatta kaikkien oppilaiden käsitys tuntemattomasta luvusta on monia arvoja saava muuttuja, joka on Küchemannin luokituksen viides taso. Yksi oppilas ymmärsi riippuvuuden tehtävässä *"Jos $c + d < 10$ ja $c < d$, mitä osaat sanoa d :stä?"* ja hänet sijoitettiin luokituksen ylimmälle tasolle: *"Jos c olisi vaikka 1, niin silloin d voisi olla 5. Jos c olisi 2, niin silloin d voisi olla 5. Jos c olisi 3, silloin d voisi olla 5. Jos c olisi 4, silloin d voisi olla 5."*

Pohdinta

Tässä tutkielmassa selvitettiin, miten viidesluokkalaiset käsittelevät muuttujia matematiikassa. Puolet oppilaista merkitsee muuttujan. Tulos on erittäin rohkaiseva, kun huomioidaan, ettei oppilaille ole opetettu algebraa. Myös aiempiin tutkimuksiin suhteutettuna oppilaat menestyivät hyvin. Lisäksi kaikilla tutkituilla on käsitys symbolista. Hieman yli puolet oppilaiden symbolikäsitteistä edustavat Küchemannin luokituksen kolmea alinta tasoa, joihin Küchemannin (1981) ja Hihnalalan (2005) mukaan oppilaiden ajattelu usein viittaa. Vaikka Küchemann pitää alimpia tasoja alkeellisina tulkintoina, tämän tutkimustulokset ovat myönteiset, kun huomioidaan oppilaiden ikä ja vähäinen kokemus muuttujista. Tutkielman mukaan oppilailla on hyvät valmiudet ratkaista tuntemattomia lukuja sisältäviä tehtäviä, joten oppilaiden algebrallinen ajattelu on tältä osin hyvää, ja opetussuunnitelman vaatimukset täyttyvät. Tulos vahvistaa käsitystä siitä, etteivät päättämällä ratkaistavat yhtälöt tuota oppilaille erityisiä hankaluuksia (Schliemann ym. 1998). Suomalaisnuorilla on kuitenkin ongelmia juuri yhtälöiden ratkaisemisessa (Kupari & Törnroos 2004). Ongelmat tullevat ilmi vasta, kun yhtälö vaatii algebrallista ratkaisua eikä päättelyä enää riitä.

Oppilailla on virheellisiä käsityksiä muuttujista, mikä on havaittu aiemmissakin tutkimuksissa. Oppilaat sijoittavat muuttujan paikalle luvun, kun eivät kykene käsittelemään muuttujaa lausekkeessa. Oppilaat antavat saman tehtävän samalle symbolille kaksi eri merkitystä. Toisaalta oppilaat rajoittavat muuttujan arvoja virheellisin perustein. Algebran merkitsemistavat ovat oppilaille outoja, jolloin he liittävät symbolin paikkajärjestelmään. Oppilaat määrittävät symbolille sopivat arvot aakkosjärjestyksen tai alkuäänteen perusteella. He ajattelevat yleensä luonnollisia lukuja, vaikka tehtävän kontekstiin sopisi esimerkiksi rationaaliluvut. Numeerisen vastauksen puuttumisen hyväksyminen on oppilaille hankalaa, eivätkä he haluaisi hyväksyä algebrallista lauseketta tehtävän vastaukseksi. Lisäksi puutteellinen käsitys yhtäsuuruudesta heikentää oppilaiden valmiuksia algebralliseen ajatteluun (Christou ym. 2007; Christou & Vosniadou 2005; Duke & Graham 2007; Hassinen 2006; Hihnala 2005; Küchemann 1981; MacGregor & Stacey 1997, 1999; McNeil & Alibali 2005; Knuth ym. 2008; Stacey & MacGregor 1997.)

Tuen vaikutus oppilaan muuttujien käsittelyyn

Toisena tutkielman tavoitteena oli selvittää tuen vaikutusta oppilaan muuttujien käsittelyyn. Kaikki oppilaat kehittivät haastattelussa muuttujan merkitsemistapaansa joko itsenäisesti tai haastattelijan ohjaamana. Tukea saaneista oppilaista suurin osa soveltaa uutta merkitsemistapaa itsenäisesti seuraavissa tehtävissä. Muidenkin tutkimusten mukaan oppilaat kehittävät joko spontaanisti tai tuettuina merkitsemistapoja muuttujalle (Carpenter & Levi 2000; Schliemann ym. 1998; Warren & Cooper 2005). Oppilaiden tulkinnat

muuttujasta täsmentyivät haastattelussa. Kaikkien haastateltujen oppilaiden käsitys muuttujasta on keskustelussa tasokkaampi kuin kirjallisissa tehtävissä. Yhtä oppilasta lukuun ottamatta oppilaiden käsitykset muuttujasta edustavat Küchemannin teorian toiseksi ylintä tasoa ja yksi oppilas ylintä.

Tutkimuksessa ilmeni, että muuttujan merkitseminen vaikuttaa tuntemattomia lukuja sisältävien tehtävien ratkaisemiseen. Algebran oppimisen helpottamiseksi muuttujien merkitsemistä olisi hyvä harjoitella ennen yhtälöiden ratkaisemista. Perinteisesti algebran opetus alkaa juuri yhtälöistä. Lisäksi symbolin tulkinnat ovat yhteydessä muuttujan merkitsemiseen. Symbolin tuntemattomaksi luvuksi käsittäneet oppilaat menestyvät parhaiten muuttujan merkitsemisessä. Heikoiten menestyvät symbolin objektiksi käsittäneet. Edistyneimmin symbolin tulkinneet menestyivät merkitsemisessä heikommin kuin symbolin tuntemattomaksi luvuksi tulkinneet. Tulos viittaa siihen, että symbolin tulkitseminen tuntemattomaksi luvuksi voi olla aloitteleville algebran opiskelijoille hyvä tapa tutustua muuttujan käsitteeseen. Objektitulkinna opetuksessa puolestaan ei kannata suosia. Peruslaskutaidot (RMAT-testi) ovat yhteydessä tuntemattomia lukuja sisältävien tehtävien ratkaisemiseen. Siis algebran oppiminen vaatii myös aritmetiikan hallintaa.

Tämä tutkielma perustuu Küchemannin (1981) teoriaan oppilaiden tavoista tulkita muuttujia. Teoriaa on onnistuneesti käytetty monissa tutkimuksissa, joten se on luotettava kehys tällekin tutkielmalle. On huomattava, että päätelmät perustuvat tutkijan tulkinnoille oppilaan esittämästä tehtävän ratkaisusta, eivätkä tulkinnat välttämättä edusta oppilaan todellisen ajattelun tasoa. Myöskään oppilaan kirjallisen tehtävän ratkaisusta ei aina ilmene ajattelun taso. Kirjalliset tehtävät saattavat vääristää oppilaan ajattelun tasoa heikompaan suuntaan, sillä haastatteluissa ilmeni, että kaikki oppilaat eivät kirjallisissa tehtävissä ilmaise todellista ajattelun tasoaan. Toiseksi on mahdollista, että kaikki oppilaat eivät suhtautuneet tehtäviin tosissaan ja tehneet niitä huolellisesti, sillä moniin tutkimuksiin osallistuminen heikentää motivaatiota.

Tutkimuksen luotettavuuden arvioinnissa on huomioitava myös, että tutkittavien luokkien välillä on testimenestyksessä tilastollisesti merkitsevä ero. Yksi luokista menestyi testeissä muita paremmin. Verrattavat ryhmät esimerkiksi symbolin tulkitsemisissä ovat pieniä, mikä on huomioitava tuloksia yleistettäessä. Ryhmien yhdistäminen olisi piilottanut mielenkiintoisia tuloksia, joten ryhmiä päädyttiin käsittelemään erillisinä pienuudesta huolimatta. Myös tutkimusjoukon pienuus on huomioitava tutkimuksen luotettavuutta arvioitaessa. Tutkimuksen luotettavuutta parantaa kuitenkin useiden menetelmien käyttö niin aineistonkeruussa kuin analyysissäkin. Siten tutkimuksen päätelmät perustuvat useisiin menetelmiin.

Rohkeasti algebraa opettamaan

Tutkimus tukee käsitystä, että viidesluokkalaisilla on algebrallista ajattelua ennen varsinaista algebran opetusta. Kaikilla oppilailla on käsitys muuttujasta,

ja puolet oppilaista kykenee myös merkitsemään muuttujan. Tuntemattomia lukuja sisältävien tehtävien ratkaiseminen sujuu hyvin. Oppilailla on kuitenkin virhekkäisyyksiä, jotka vaikeuttavat algebran oppimista. Jatkossa oppilaiden ennakkotiedot, niin oppimista helpottavat kuin oppimista hankaloittavatkin, on huomioitava opetuksessa entistä tarkemmin. Lisäksi ennen opetusta oppilaiden algebrallista ajattelua tulee tukea ja kehittää. Tämä ei tarkoita sitä, että algebran sisältöjä siirretään ahtaaseen alaluokkien opetussuunnitelmaan, tai että alaluokilla pidetään erityisiä esialgebran oppitunteja. Esialgebraa voidaan toteuttaa matematiikan muissa sisällöissä. Tämän tutkielman tulokset ja aiemmat tutkimukset viittaavat siihen, että algebran menestyksellinen oppiminen vaatii ainakin aritmetiikan hallintaa, monenlaisten lukujen käsittelyä, ajattelun laajentamista luonnollisia lukuja pidemmälle ja oikeaa tulkintaa yhtäsuuruudesta. Algebraan siirryttäessä on kiinnitettävä huomio muuttujatulkinnan kehittämiseen, muuttujan merkityksen ymmärtämiseen ja muuttujan merkitsemiseen sen sijaan, että typistetään algebra symbolien manipuloimiseksi. Nämä seikat eivät vaadi muutoksia opetussuunnitelmaan tai matematiikan tuntimääriin. Sen sijaan huomioimalla viitteet oppilaan algebrallisen ajattelun rakentumisesta ja oppilaiden ennakkokäsitykset voidaan algebran opetusta kehittää aiempaa tuloksellisempaan, merkityksellisempään ja mielekkäämpään suuntaan.

Lähteet

- Carpenter, T. P. & Levi, L. 2000. *Developing Conceptions of Algebraic Reasoning in the Primary Grades*. University of Wisconsin-Madison. National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.
- Christou, K. P., Vosniadou, S. 2005. How Students Interpret Literal Symbols in Algebra : A Conceptual Change Approach. Teoksessa B. G. Bara, L. Barsalou & M. Ducciarelli (toim.) *Proceedings of the XXVII Annual Conference of the Cognitive Science Society, Italy*, 453–458.
- Christou, K. P., Vosniadou, S. & Vamvakoussi, X. 2007. Students' Interpretations of Literal Symbols in Algebra. Teoksessa S. Vosniadou, A. Baltas & X. Vamvakoussi (toim.) *Re-Framing the Conceptual Change Approach in Learning and Instruction*. *Advances in Learning and Instruction Series*. Oxford: Elsevier Press, 283–297.
- Duke, R. & Graham, A. 2007. Inside the Letter. *Mathematics teaching incorporating mikromath* 200, 42–45.
- Hassinen, S. 2006. Idealähtöistä koulualgebraa. IDEAA-opetusmallin kehittäminen algebran opetukseen peruskoulun 7. luokalla. Helsingin yliopisto. Soveltavan kasvatustieteen laitos. Tutkimuksia 274. Väitöskirja.
- Hihnala, K. 2005. Laskutehtävien suorittamisesta käsitteiden ymmärtämiseen. Peruskoululaisen matemaattisen ajattelun kehittyminen aritmetiikasta algebraan siirryttäessä. Jyväskylän yliopisto. Jyväskylä Studies in Education, Psychology and Social Research 278.

- Humberstone, J. & Reeve, R. A. 2008. Profiles of algebraic competence. *Learning and instruction* 18, 354–367.
- Kieran, C. 1991. Helping to Make the Transition to Algebra. *Arithmetic Teacher* 38 (7), 49–51.
- Kieran C. 1992. The learning and teaching of school algebra. Teoksessa D. A. Grouws (toim.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan Publishing Company, 390–419.
- Knuth, E. J., Alibali, M. W., Hattikudur, S., McNeil, N. M. & Stephens, A. 2008. The Importance of Equal Sign Understanding in the Middle Grades. *Mathematics Teaching in the Middle School* 13 (9), 514–519.
- Küchemann, D. E. 1981. Algebra. Teoksessa K. M. Hart (toim.) *Children's Understanding of Mathematics*, 11–16. Lontoo: John Murray, 102–119.
- Kupari, P. & Törnroos, J. 2004. Matematiikan osaaminen peruskoulussa kansainvälisten arviointitutkimusten valossa. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 138–169.
- Linchevski, L. 1995. Algebra With Numbers and Arithmetic With Letters: A Definition of Pre-Algebra. *Journal of Mathematical Behavior* 14, 113–120.
- Malisani, E. & Spagnolo, F. 2009. From arithmetical thought to algebraic thought: The role of the “variable”. *Educational Studies in Mathematics* 71 (1), 19–41.
- MacGregor, M. & Stacey, K. 1997. Students' understanding of algebraic notation: 11–15. *Educational Studies in Mathematics* 33, 1–19.
- MacGregor, M. & Stacey, K. 1999. A flying start to algebra. *Teaching Children Mathematics* 6 (2), 78–85.
- McNeil, N. M. & Alibali, M. W. 2005. Why Won't You Change Your Mind? Knowledge of Operational Patterns Hinders Learning and Performance on Equations. *Child Development* 76 (4), 883–899.
- Merenluoto, K. & Lehtinen, E. 2004. Käsitteellisen muutoksen näkökulma matematiikan oppimiseen ja opettamiseen. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 301–319.
- Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004. Helsinki: Opetushallitus.
- Räsänen, P. 2004. *RMAT – laskutaidon testi 9-12-vuotiaille*. Käsikirja. Niilo Mäki Instituutti. Jyväskylä.
- Schliemann, A. D., Carraher, D. W., Brizuela, B. M. & Jones, W. 1998. *Solving Algebra Problems before Algebra Instruction*. Tufts University, TERC & Harvard University.
- Stacey, K. & MacGregor, M. 1997. Ideas about symbolism that students bring to algebra. *The Mathematics Teacher* 90 (2), 110–113.
- Warren, E. & Cooper, T. J. 2005. Young Children's Ability to Use the Balance Strategy to Solve for Unknowns. *Mathematics Education Research Journal* 17 (1), 58–72.

LUOKANOPETTAJAOPISKELIJAN MATEMATIIKKAKUVAN ILMENEMINEN LUOKKAHUONEKESKUSTELUSSA

Pro gradu- tutkielma

Riina Harri

Luokanopettajaopiskelija tutki matematiikkakuvansa ilmenemistä opetusharjoittelussa pitämillään kolmella ensimmäisen luokan matematiikan ja yhdellä matematiikkapainotteisella käsityön tunnilla. Tutkimuksen aineisto kerättiin videoimalla oppitunnit. Harjoittelijan tunneilla esittämät kysymysten muodot ja funktiot luokiteltiin Myhillin (2006) sekä Saksolan ja Tolosen (2009) luokitteluun lisäämien luokkien mukaisesti. Tutkimuksessa havaittiin opettajaopiskelijan matematiikkakuvan ja matematiikan opetuksen välillä olevan sekä yhtäläisyyksiä että eroja. Opettaja näyttää toteuttavan omalta kouluajaltaan tuttua menetelmää; valtaosa opettajan esittämistä kysymyksistä on suljettuja kysymyksiä, joihin hänellä on yksi ennalta tietämä oikea vastaus. Toisaalta opettaja esittää myös kysymyksiä, joihin vastatessaan oppilas perustelee tekemiään päätelmiä. Tutkimus tähtää tutkijan opettajuuden kasvun ja kehityksen tukemiseen. Tutkimuksella pyritään kannustamaan opettajia oman työnsä tarkasteluun. Lisäksi työllä pyritään panostamaan opettajan puheen ja kysymysten sekä vuorovaikutustilanteiden tutkimiseen.

Johdanto

Peruskoulussa matematiikan oppimisessa on tärkeää matematiikan verbalisointi eli kielentäminen. Sillä tarkoitetaan oppilaan kykyä mm. puhua matematiikasta (Joutsenlahti 2003a; Ilmavirta 2003). Kuten Aarnos ja Perkkilä (2007) toteavat, matematiikan ja kielen suhde on monimutkainen. Mielestäni on olennaista oppia keskustelemaan matematiikasta jo matematiikan oppimispolun alkuvaiheessa – siis alkuopetuksessa. Lindgrenin (1990) mukaan ulkoinen materiaali ja ääneen ajattelu ovat tärkeitä erityisesti matemaattisen toiminnan kehittymisen alkuvaiheissa. Vuorovaikutuksen kautta oppimista eli ideoiden vaihtamista ja vertailua sekä toisten lasten havainnoimista voidaan myös pitää osana matemaattista ajattelua. Lapsen näkemys lähestyä matemaattisia tehtäviä laajenee, kun hän oppii tekemään kysymyksiä ja keskustelemaan matemaattisista ongelmista (Aarnos & Perkkilä 2007; Piaget 1988; Fisher 1995).

Kokemukseni mukaan matematiikan opetuksessa opettaja käytti usein kysymyksiä, joihin hänellä on ennalta tietämä yksi oikea vastaus. Kokemukseni vastaa tutkimustuloksia (Edwards & Mercer 1987; Mercer & Dawes 2008; Perkkilä 2002.) Oppilaalle ei jäänyt tilaa tuoda esiin omia ajatuksiaan tai aloitteitaan. Tällöin oppiaineena matematiikka näyttäytyi erehtymättömänä tieteenä (ks. myös Kupari 1999). Opetusharjoittelussa syksyllä 2009 syvennyin tarkastelemaan matematiikkakuvaani. Siinä tapahtuneiden muutosten jälkeen olen Malatyn (2009) kanssa yhtä mieltä siitä, että matematiikka ei ole suoritustapa vaan ajattelutapa. Malatyn mukaan esimerkiksi toisen asteen yhtälön yleisratkaisu esitetään usein koulussa nimellä kaava, vaikka tosiasiassa

se on lause, joka saadaan toisista lauseista esittämällä todistus. Ratkaisu esitetään oppilaille valmiina ja heidän tehtäväkseen jää vain sen käytön harjoittelu. Sitä ei voida nimittää opetuksiksi ja sitä, mitä he opiskelevat ei voida nimittää matematiikaksi, ja se on kaukana matemaattisesta ajattelusta. (Malaty 2009.) Ohjatessaan oppilasta kohti oikeata vastausta oppilaalla ei ole tilaa tehdä omia oivalluksia ja keskustelu on rajoitettua (Bauersfeld 1988). Opettajien on vaikeaa siirtyä pois tästä tavasta. Ymmärtääkseen erilaisten harjoitusten toimivuutta, opettajan täytyy ensin nähdä niiden hyödyt ja syyt, miksi ne kannattavat.

Brodien mukaan (2008, 34) eräs uudistuneen (*reform-oriented*) matematiikan opetuskäytännön avaintekijä on valita tehtäviä, jotka mahdollistavat käsitteellisen ajattelun, argumenttien perustelun ja kommunikoinnin matemaattisista ajatuksista. Myös Joutsenlahti (2003b) esittää samantapaisia huomioita perätessään matematiikan kielentämisen merkitystä opetuksessa.

Tahdon antaa oppilaileni mahdollisuuden ymmärtää, mitä matematiikka on. Malatya (2003, 49) lainatakseni, alkuopetuksesta lähtien pitäisi matematiikan tunneilla opettaa oikeata matematiikkaa. Kuten saada oppilaat oppimaan, että matematiikan kauneudesta voidaan nauttia. Olennaista on tuoda esille se tosiasia, että matematiikkaa on kaikkialla (ks. Malaty 1997). Siksi tutkin, miten opetin matematiikkaa ja millaisena matematiikka näyttäytyi pitämälläni tunneilla. Opetusharjoittelussa sain mahdollisuuden tutustua Varga–Neményi -menetelmän periaatteisiin. Mielestäni menetelmä tarjoaa mahdollisuuden rikastuttaa matematiikan opettamista ja oppimista.

Tutkimus on tapaustutkimus, jossa aineiston keruumenetelmäksi valitsin videoinnin sen monipuolisuuden takia. Tutkimuksen tehtävä ei ollut arvioida opetusharjoittelussa tapahtunutta opetuksen hyvyyttä tai huonoutta. Sitä vastoin tavoitteena oli tutkia, miten matematiikkakuvani ilmeni esittämässäni kysymyksissä ja luokan vuorovaikutuksessa. Tutkimuksen tavoite oli kasvaa ja kehittyä oman työn tutkijana. Vastauksia etsittiin seuraaviin kysymyksiin:

1. Miten opettajaopiskelijan esittämien kysymysten muodot ja funktiot jakaantuvat?
2. Millä tavalla opettajaopiskelija käyttää kysymyksiä?
3. Esittävätkö oppilaat kysymyksiä luokahuonekeskustelun aikana?

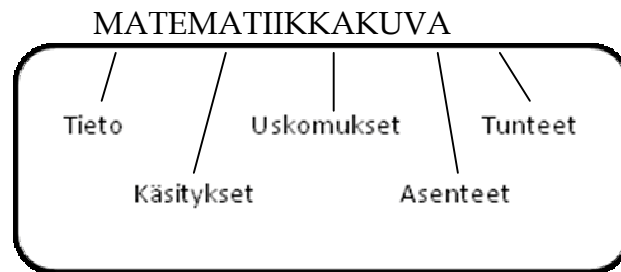
Näihin kysymyksiin saatuja vastauksia tarkastellaan tutkijaopettajan matematiikkakuvaan verraten.

Matematiikkakuva sekä kysymyksen muoto ja funktio

Tässä artikkelissa tutkimuksen teoreettisena viitekehyksenä toimivat matematiikkakuva Pietilän (nyk. Laine) (2002) määritelmän mukaisena ja Myhillin (2006) malli kysymysten luokittelusta Saksolan ja Tolosen (2009) siihen tekemien lisäysten mukaisena.

Matematiikan opettajaa koskevaa tutkimusta tehtiin 1990-luvulle saakka verraten vähän. Se kuitenkin voimistui nopeasti erityisesti opetukseen liittyvien uskomusten tutkimisen myötä. (Kupari 1999.) Opettajankoulutuksessa tulisi huomioida opiskelijoiden matematiikkakuva, sillä se toimii ikään kuin suodattimena opiskelijan ajattelussa hänen osallistuessaan opintoihin (Pehkonen 1998).

Matematiikkakuvaan liittyvillä käsitteillä ei ole yhteisesti hyväksytyjä määritelmiä (ks. esim. Pajares 1992). Eri tieteenalojen ja tutkijoiden määritelmät saattavat poiketa toisistaan tai olla osittain päällekkäisiä. Näin ollen matematiikkakuvaa käsittelevien tutkimusten vertailu on vaikeaa. Erialaisten käsitteiden päällekkäisyys ja runsaus kertovat matematiikkakuvan hahmottamisen vaikeudesta. (Pietilä 2002.) Tässä matematiikkakuva määritellään Pietilän (2002) väitöskirjassaan esittämän mallin mukaisena.



Kuvio 1. Matematiikkakuvaan liittyvät osa-alueet Pietilän (2002) mallia mukaillen

Pietilä (2002) määrittelee matematiikkakuvan muodostuvan yksilön subjektiivisesta tiedosta ja tunteista, joihin liittyvät hänen asenteensa, uskomuksensa ja käsityksensä matematiikasta. Matematiikkakuvan osa-alueet lomittuvat yhtenäiseksi kokonaisuudeksi.

Pietilä jakaa (2002) matematiikkakuvan edellä mainittujen osa-alueiden lisäksi kahteen komponenttiin: 1) kuvaan itsestä matematiikan oppijana ja opettajana ja 2) kuvaan matematiikasta ja sen opettamisesta. Kaasilan ym. (2004) mukaan edellinen komponentti on etupäässä affektiivinen (arvioiva), kun taas jälkimmäinen komponentti on voittopuolisesti kognitiivinen (rakenteellinen). Komponentit rakentuvat tiedosta, tunteesta, uskomuksista, käsityksistä ja asenteista.

Luokanopettajaopiskelijan matematiikkakuva ennen ja jälkeen aineopintojen

Pietilä (2002) toteaa, että saamastaan koulutuksesta huolimatta opettajat palaavat opetuksessaan omalta kouluajalta tuttuihin menetelmiin (ks. myös Hihnala 2005). Tietoisuus käytettyjen menetelmien luonteesta lisäänty refleктоimalla: millaisia kysymyksiä opettaja esittää ja vastaavatko ne opettajaopiskelijan matematiikkakuvaa (taulukko 1).

Matematiikkakuvan selkiyttämisen tukena tässä tutkimuksessa käytettiin matematiikan eri aspekteja, joiden kautta matematiikan oppimista voidaan lähestyä. Pehkosen (1995) mukaan on olemassa neljä aspektia: laskenta-aspekti, jossa matematiikka nähdään lähinnä laskennoksi; systeemiaspekti, jossa merkitys löytyy todistuksista; prosessiaspekti, jossa merkitys seuraa suoraan kehityksestä ja sovellettavuusaspekti, jossa matematiikalla on merkitystä sen sovellettavuuden takia (vrt. myös Törner & Grigutch 1994; Kupari 1999). Taulukkoon 1 on koottu Pietilän (2002) jakamien kahden komponentin mukaan, opettajaopiskelijan matematiikkakuva ennen ja jälkeen matematiikan aineopintojen.

Taulukko 1 Opettajaopiskelijan matematiikkakuva ennen ja jälkeen matematiikan aineopintojen

	Opettajaopiskelijan matematiikkakuva ennen matematiikan aineopintoja (60 op.)	Opettajaopiskelijan matematiikkakuva matematiikan aineopintojen (60 op.) jälkeen
1. kuva itsestä matematiikan oppijana ja opettajana	Oppijana luokanopettajaopiskelija oli hieman tylsistynyt, tunnollinen suorittaja	Opettajaopiskelija on innokas etsimään uusia näkökulmia matematiikan maailmasta ja tarkastelemaan matematiikan oppimista eri aspekteista käsin
a) matematiikkaan liittyvät tavoitteet ja motiivit	Tavoitteena oli saada tehtävät valmiiksi ja suoriutua hyvin arvosanoin kokeesta	Oivaltaa ja ymmärtää matematiikan oppimista kaikista sen eri aspekteista käsin
b) tunteet matematiikkaa kohtaan	Matematiikka oli tylsää saman algoritmin tai kaavan toistamista. Toisaalta matematiikka oli kivaa, koska opettajaopiskelija koki osaavansa laskea	Eräänlainen tuska, koska matematiikkaa on haasteellista opettaa matematiikkakuvassa tapahtuneiden muutosten mukaisesti. Toisaalta ilo siitä, että ovi matematiikan maailmaan on raollaan
c) arvio omista kyvyistä matematiikan opiskelussa	Samaa algoritmia tai kaavaa toistamalla suoriutui tehtävistä ja sai hyviä arvosanoja matematiikasta	Epävarmuus omista kyvyistä johtavat epävarmuuteen opettamisen osaamisesta toisaalta varmuus siitä, ettei kaikkea voi täysin koskaan osata tekee opettamisen mielenkiintoiseksi
2. kuva matematiikasta ja sen opettamisesta	Matematiikka oli laskemista ja suorittamista sekä oppikirjan tehtävien tekemistä (ks. laskenta-aspekti)	Matematiikkaa on kaikkialla. Opettaminen on mielenkiintoista ja haastavaa (sis. kaikki eri oppimisen aspektit)
a) miten matematiikkaa opitaan	Matematiikkaa opittiin laskemalla ja mekaanisesti samaa kaavaa toistaen	Laskemisen lisäksi matematiikkaa opitaan aktiivisesti toimimalla ja keskustelemalla erilaisista ratkaisutavoista sekä perustelemalla päätelmiä
b) miten matematiikkaa opetetaan	Matematiikkaa opittiin opettajan esityksen ja kyselyn kautta. Opettajan esittämää algoritmia toistettiin oppikirjan laskutehtävissä	Käyttäen monipuolisesti erilaisia työtapoja, joissa oppijalla on aktiivinen rooli

Opettajaopiskelija oli kiltti laskija, jolle matematiikka oli tehtävien tekemistä ja algoritmista toistamista, laskenta-aspektin mukaista oppimista. Algoritmien toistaminen ei vaadi yhtä korkeatasoista ajattelua kuin ei-algoritmien (ks. myös Brodie 2008). Algoritmien toistaminen teki matematiikasta aika helppoa, mutta tunteet matematiikkaa kohtaan olivat sekä kielteiset että myönteiset. Kielteisiä tunteita herätti kaavamaisuus ja myönteisiä tunteita pärjääminen.

Matematiikkaan ei kuulunut oppilaiden keskinäinen keskustelu matematiikasta, vaan puhetta johti opettaja esittävällä opetuksellaan ja kysymyksillään. Alusta alkaen opittiin kalastamaan oikeita opettajan haluamia vastauksia. Lukiossa tehtäviä yhdessä vertaisten kanssa laskiessa opettajaopiskelija alkoi oivaltaa samalla tehtävällä voivan olla enemmän kuin yksi oikea ratkaisutapa. Siihen mennessä erilaisista ratkaisustrategioista ja ratkaisuvaihtoehdoista ei puhuttu: painotettiin yhtä oikeaa tapaa ratkaista. Lukiossa tehtävien yhdessä tekemisestä oli hyötyä ja merkittävimmät oppimiskokemukset syntyivät kokemuksista: ”Ai sää ajattelet noin, niin voihan sen niinkin ajatella.”.

Keskustellessa vertaisen kanssa käsitykset vastausstrategioista laajenivat. Kuitenkin vasta yliopistossa matematiikan historian kurssilla syntyi aavistus siitä, mitä kaikkea matematiikka on. Aiemmin yliopisto-opintojen viitoittamana opiskelija tutustui matematiikan oppimiseen systeemiaspektin ja prosessiaspektin kautta. Sovellettavuusaspekti jäi pinnalliseksi johtuen teoriapainotteisista tehtävistä ja opiskelijan vajavaisista opiskelustrategioista.

Opintojen aikana opetusharjoittelussa ja vähäisiä sijaisuuksia tehdessä pidetyillä matematiikan tunneilla opettajaopiskelijasta tuntui, ettei oma matematiikkakuva näkynyt opetuksessa. Matematiikka tuntui olevan muutakin kuin mekaanista suorittamista, mutta työkalut muunlaisen opetuksen toteuttamiseen puuttuivat.

Aineenhallinta ja suoritettavat matematiikan opinnot eivät näyttäneet siirtyvän opetukseen (ks. myös Cooney 1999). Opettajaopiskelijan oivallus syntyi tuntiessa eräänlaista epämääräistä tuskaa hänen pitäessään matematiikan tunteja ennen syksyn 2009 opetusharjoittelua. Tuntui, että opetus ei sisältänyt sitä, millä saisi matematiikan eri ulottuvuuksia esiin. Arkielämä on pullollaan matemaattisia ongelmia, mutta opettajaopiskelijan kokemuksen mukaan koulumatematiikka ei juuri korosta ja luo yhteyksiä koulun ulkopuolelle tai ulotu oppijan omakohtaisiin kokemuksiin. Eräs kanava, joka auttaisi rikkomaan koulumatematiikan rajoittuneisuutta, on oppiainerajojen rikkominen ja oppiaineiden integrointi. Tutkimusaineistossa on mukana yksi oppitunti käsityönjaksolta, johon on integroitu matematiikkaa.

Opettajaopiskelija asetti syksyn 2009 opetusharjoittelun tavoitteeksi opettaa matematiikkaa muuttuneen matematiikkakuvan mukaisesti. Toinen tavoite oli lisätä varmuutta omien ajatusten oikeellisuudesta. Varmuus omien ajatusten oikeellisuudesta auttaa opettajaa yrittämään ja pysymään kannassaan haasteista huolimatta.

Kysymyksen muoto ja funktio

Opettajaopiskelijan esittämät kysymykset luokiteltiin Myhillin (2006) mallin mukaisesti. Myhill (2006) jakaa kysymykset neljään eri luokkaan: suljettuihin (*factual*), avoimiin (*open*), prosessi (*process*) sekä tunnin järjestykseen ja organisointiin liittyviin hallinta (*procedural*) kysymyksiin. Suljetut kysymykset, joihin on olemassa yksi opettajan ennalta tietämä ja hakema vastaus, eivät vaadi oppilaalta korkeatasoista ajattelua (Myhill & Brackley 2004). Avoin kysymys on avain oppilaan ajatteluun ja kokemusmaailmaan. Se on haasteellisempi oppilaalle ja vaatii kognitiivisia toimintoja, ajattelua ja päättelyketjua. Avoimeen kysymykseen vastatessaan oppilas tuo esiin omia kokemuksiaan ja merkityksiään. Prosessikysymykset liittyvät oppilaiden ajattelun selittämiseen ja oppimisprosessiin (ks. myös tiedustelukysymykset (*probing*) Sahin & Kulm 2008). Tunnin järjestystä ja organisointia koskevia kysymyksiä voisi myös kutsua toimintakysymyksiksi. Nimensä mukaisesti ne ohjaavat tunnin toiminnan kulkua. (Myhill 2006.) Lisäksi kysymysten muotoryhmään lisättiin Saksolan ja Tolosen (2009) tutkimuksessaan käyttämä luokka: muut kysymykset. Tähän luokkaan lisättiin sellaiset kysymykset, jotka eivät olleet selkeästi suljettuja tai avoimia.

Taulukko 2 Kysymysten muodot (Myhill 2006; Saksola & Tolonen 2009)

Kysymyksen muoto	Kuvaus	Esimerkit
Suljettu	Kysymykset, joihin esittäjällä on ennalta tiedetty vastaus	Onko sillä kuviolla kolme kulmaa? Onko siellä kuvioita, joilla on kaksi kulmaa?
Avoim	Kysymykset, joiden esittäjällä ei ole ennalta tiedettyä vastausta ovat usein mielipiteitä, hypoteeseja tai ideoita	Miten mielestäsi voisit jakaa ne kahteen ryhmään?
Prosessi	Kysymykset, jotka edellyttävät vastaajaa esittämään perusteluita ajattelulle	Miksi ei niitä ole täällä? (Kuvioita, joilla on yksi tai kaksi kulmaa.) Miksi ne ovat monikulmioita? (jatkuu)
Toiminta	Kysymykset, jotka liittyvät oppitunnin järjestyksen ja organisoinnin ylläpitoon	Oppilas 8 näetkö kuvion? Huijasitko sinä?
Muut	Kysymykset, jotka eivät sovi muihin luokkiin, vastataan usein viittaamalla. Lisäksi tässä tutkimuksessa ne kysymykset, jotka liittyvät koulun sääntöjen noudattamiseen	Kuinka moni kirjoitti siihen suora? Missä olet ollut välitunnin aikana?

Toisin kuin usein ajatellaan, suljettu kysymys ei välttämättä ole yhtä kuin huono kysymys. Kysymyksen muoto ja funktio yhdessä kertovat paremmin kysymyksen toimivuudesta.

Myhill jakaa (2006) kysymyksen funktiot yhteentoista eri luokkaan: luokan hallinta (*class management*), faktojen esille tuonti (*factual elicitation*), vihjeiden anto (*cued elicitation*), harjoittelu (*practising skills*), sisällön kokoaminen (*building on content*), ajattelun rakentaminen (*building on thinking*), kertaus (*recapping*), aikaisemman tiedon selvittäminen (*checking prior knowledge*), sanaston kehittäminen (*developing vocabulary*), ymmärryksen selvittäminen (*checking understanding*) ja oppilaan reflektion kehittäminen (*developing reflection*). Tässä tutkimuksessa lisättiin kaksi ylimääräistä luokkaa kysymysten funktioryhmään, koska Saksolan ja Tolosen tapaan (2009) osa aineiston kysymyksistä sopi paremmin näihin kahteen lisättyyn luokkaan. Lisätyt kysymysten funktiot ovat *aktivointi* ja *pumppaus* (Saksola & Tolonen 2009).

Taulukko 3 Kysymysten funktiot (Myhill 2006; Saksola & Tolonen 2009)

Kysymyksen funktio	Kuvaus	Esimerkit
Hallinta	Liittyy tunnin organisointiin ja järjestyksen ylläpitoon	Näettekö kaikki sen kuvion tuolla taululla?
Fakta	Tavoitellaan opettajan ennalta tietämää vastausta	Mikä meillä tässä on?
Vihje	Johdattaa oppilas vastaukseen	Entä se missä sun kirja on?
Sisällön kokoaminen	Tehdä yhteenveto oppitunnin aiheesta	(Ei esiintynyt aineistossa.)
Ajattelun rakentuminen	Edellyttää oppilailta käsitteellistä ajattelua, johdattelee aiheessa eteenpäin	Mitä me tarvitsemme? Miksi olen laittanut sinne näin?
Kertaus	Kerrata asia, joka on käyty läpi	Eilen kävimme jotakin läpi. Laitoimme puuhun muotoja. Minkä mukaan?
Harjoittelu	Edellyttää oppilasta harjoittelemaan strategiaa tai taitoa	Miten saat neliöstä piirrettyä hyvin neliön? (jatkuu)
Aikaisempi tieto	Selvittää, mitkä ovat oppilaiden ennakkokäsitykset	Mitä eroa huomaat näissä kuvioissa? Mihin sinä laittaisit tämän muodon? (Jatkuu)
Sanaston harjoittelu	Testata oppilaiden käsitteellistä taidon hallintaa	Mitä tässä on viisi?
Ymmärryksen kehittyminen	Laajentaa ymmärtämistä ja tarkistaa, mitä on opittu	Miksi se ei mennyt oikein?
Reflektion kehittyminen	Edellyttää oppilasta pohtimaan, millaisia strategioita hän käyttää	(Ei esiintynyt aineistossa.)
Aktivointi	Aktivoida oppilas osallistumaan tunnin kulkuun	Kuinka moni kirjoitti siihen suora?
Pumppaus	Kerätä lisää tietoja, huomioita ja ajatuksia	Ja mitä muuta?

Kaikkia kysymysten funktioluokkia ei esiintynyt tutkimuksen aineistossa. Funktioluokat reflektion kehittyminen ja sisällön kokoaminen eivät esiintyneet tutkimuksen aineistossa. Ne kuitenkin pidettiin mukana tutkimuksen aineiston analyysissä, koska näiden kysymysten funktioluokkien puuttuminen tutkimusaineistosta sisältyi tutkimustuloksiin.

Tutkimuksen lähestymistavat ja luotettavuuden arviointia

Tutkimuksen tarkoituksena oli tutkia luokanopettajaopiskelijan matematiikkakuvan ilmenemistä luokkahuonekeskustelussa. Tietoa oli

luontevaa etsiä sieltä, mistä sitä voidaan saada, siis matematiikkaa sisältävältä oppitunnilta koululuokasta. Tapaustutkimus yksityiskohtaista ja intensiivistä tietoa yksittäisestä tapauksesta (Patton 2002; Hirsjärvi ym. 2007, 130–131). Tapaustutkimukselle on tyypillistä, että kohteeksi valittua yksilöä tai ryhmää tutkitaan yhteydessä ympäristöönsä eli luonnollisissa tilanteissa (Hirsjärvi ym. 2007).

Tapaustutkimuksessa tutkija on mukana koko persoonallisuudellaan, jolloin tutkimus on arvosidonnaista eli tutkijan arvomaailma on yhteydessä näkemykseen, jonka tutkija muodostaa tutkittavasta ilmiöstä (Syrjälä ym. 1994). Tutkimuksessa toimin sekä tutkimuskohteena että tutkijana, joten vaikutin näkemykseen tutkittavasta ilmiöstä. Toisaalta tutkimusaiheen kannalta oli mahdotonta ja osittain tarpeetonta pyrkiä olemaan vaikuttamatta. Tutkimuksen tavoite oli kehittyä oman työn tutkijana. Sen tähden pyrin vilpittömästi mahdollisimman todenmukaiseen kuvaukseen matematiikkakuvani tarkastelussa, sekä sen ilmenemiseen opetuksessa.

Tutkimuksen aineisto kerättiin videoimalla opettajaharjoittelijan opetusharjoittelutunteja peruskoulun ensimmäisessä luokassa syksyllä 2009. Videointi on tehokas ja monipuolinen käyttäytymisen taltiointimenetelmä (Jacobs, Hollingsworth & Givvin 2007). Videoinnilla voidaan taltioida kuka sanoi ja kenelle. Se on hyvin yksityiskohtaista ja tarkkaa puheen taltiointia. Videon voi pysäyttää, kelata ja katsoa uudestaan. Taltioitu materiaali on rikasta ja monipuolista, sillä se tallentaa myös non-verbaaliset eleet ja ilmeet. Mahdollisuus tarkastella eleitä ja ilmeitä lisäsivät sekä kysymysten luokittelun että vuorovaikutuksen rakenteen analysoinnin luotettavuutta. Hirsjärvi ym. toteavat (2007), että tulosta voidaan pitää reliabelina, jos kaksi henkilöä tulevat samanlaiseen tulokseen. Tutkimuksen aineiston analyysin luotettavuutta olisi voitu lisätä käyttämällä tutkijatriangulaatiota.

Tulokset

Opettajaharjoittelijan matematiikkakuvan ja oppituntien aikana hänen esittämien kysymysten muotojen ja funktioiden välillä voidaan todeta olleen sekä yhtäläisyyksiä että eroja. Sahinin ja Kulmin (2008) tutkimuksen kanssa yhteneväisesti opettaja esitti paljon kysymyksiä luennoinnin (opettajan esitys) sijasta. Oppilaat esittivät ainoastaan sellaisia kysymyksiä, jotka koskivat pääosin tehtävän antoa ja opettajan antamien ohjeiden tarkennusta.

Opettajaopiskelija esitti eniten muodoltaan suljettuja kysymyksiä neljällä oppitunnilla 77,7 %, 50,9 %, 59,2 %, 83,7 % kaikista kysymyksistä. Toisen tunnin suljettujen kysymysten pienemmän määrän (50,9 %) syyksi paljastui yhteinen harjoitus. Sen aikana oppilas esitti suljettuja kysymyksiä mallintaen opettajan antamaa esimerkkiä, millaisia kysymyksiä esitetään. Opettajaopiskelija esitti funktioiltaan faktakysymyksiä 62,8 %, 31,6 %, 36,7 % ja 48,8 % neljän oppituntin aikana.

Merkittävää on oppituntien avointen kysymysten vähäinen määrä, 2,1 %, 8,8 %, 0,7 % ja 2,0 %. Toisaalta opettajaopiskelija esitti paljon perusteluita

vaativia prosessikysymyksiä 14,9 %, 15,8 %, 26,5 % ja 12,2 % neljän oppitunnin aikana. Taulukossa 4 on yhteenvedo kysymysten muotojen ja funktioiden jakaantumisesta neljältä oppitunnilta.

Taulukko 4. Yhteenvedo kysymysten muotojen ja funktioiden jakaantumisesta

Kysymys	Hallinta	Fakta	Vihje	Sisällön koonta	Ajattelun rakentuminen	Kertaus	Harjoittelu	Aikaisempi tieto	Sanaston harjoittelu	Ymmärryksen kehittyminen	Reflektion kehittyminen	Aktivointi	Pumppaus	Yhteensä	Prosenttia
Suljettu	-	155	27	-	7	6	2	2	8	1	-	1	21	230	66,3
Avoin	-	-	1	-	-	-	-	7	-	1	-	-	-	9	2,6
Toiminta	12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	12	3,5
Prosessi	-	-	2	-	4	-	-	6	3	53	-	-	-	68	19,6
Muut	7	-	-	-	1	-	15	2	-	2	-	1	-	28	8
Yhteensä	19	155	30	-	12	6	17	17	11	57	-	2	21	347	100
%	5,5	44,7	8,6	0	3,5	1,7	4,9	4,9	3,2	16,4	0	0,6	6,1	100	

Taulukon 4 mukaan opettaja esittää kysymyksiä jokaisella tunnilla samantyyllisesti. Eniten hän esitti muodoltaan suljettuja (66,3 %) ja funktioltaan fakta (44,7 %) kysymyksiä.

Opettajaopiskelijan perusteluita vaativat miksi -kysymykset saattoivat ilmentää yhteneväisyyttä opettajaopiskelijan matematiikkakuvan ja opetuksen välillä. On mahdollista, että opettaja tavoitteli lapsen kuvausta, miten hän ajatteli tehtävää suorittaessaan. Näin opettaja saa tietoa lapsen ajattelusta. (ks. esim. Nevalainen, Juvonen-Nihtinen & Lappalainen 2004.)

Opettaja näyttää esittävän kysymyksiä kalastaakseen yhden oikean vastauksen. Tällöin on vaarana, että matematiikka näyttäytyy erehtymättömänä tieteenä, jossa jokaiseen tehtävään on yksi oikea vastaus, sen sijaan, että tarkasteltaisiin erilaisia ratkaisuvaihtoehtoja.

Lukuun ottamatta toisen tunnin yhteistä harjoitusta, oppilaat eivät esittäneet oppitunnin tavoitteisiin liittyviä kysymyksiä luokkahuonekeskusteluiden aikana. Sen sijaan muutamat oppilaat esittivät omia huomioitaan. Opettaja jätti huomioimatta ne mahdollisesti sen takia, etteivät oppilaat viitanneet. Kuitenkin on mahdollista, että näin toimiessaan opettaja sivuutti oppilaiden omat kokemukset ja havainnot käsiteltävästä aiheesta. Sivuuttamista voidaan selittää myös opettajan kokemattomuudella tarttua oppilaiden esittämiin huomioihin, joihin opettaja ei ole ennalta varautunut. Lisäksi opetus-, jaksosuunnitelman sekä oppitunnin tavoitteissa pitäytyminen

saattoivat luoda rajoitteita ja opettajaharjoittelija eteni täyttääkseen nämä tavoitteet (ks. Myhill 2006; Sahin & Kulm 2008).

Tulokset kertovat opettajaharjoittelijan matematiikkakuvan ja opetuksen välisen eron olemassaolosta. On kuitenkin syytä huomata, että ei ole määritelty, millaisia opettajan esittämien kysymysten tulisi olla (Myhill 2006). Hyvän opetuksen kannalta ei ole asetuksia, kuinka paljon opettajan tulisi oppitunnin aikana esittää esimerkiksi avoimia tai suljettuja kysymyksiä. Toisaalta tutkimuksen tarkoitus ei ollut selvittää opetuksen hyvyttä tai huonoutta. Tavoite oli tarkastella luokanopettajaopiskelijan matematiikkakuvan ilmenemistä hänen esittämässään kysymyksissä ja luokan vuorovaikutuksen rakenteessa. Yhtä lailla on mahdotonta määritellä tarkasti, miten opettajan esittämien kysymysten tulisi jakaantua, jotta hänen matematiikkakuvansa ilmenisi niissä. Sen sijaan voidaan esittää tulkinta ja tehdä johtopäätöksiä valitun teoreettisen viitekehyksen perusteella.

Tulosten mukaan opettajaopiskelijan matematiikkakuvan ja hänen esittämien kysymysten välillä on myös eroavaisuuksia, jotka opettajaopiskelija huomioi opetusta kehittäessään.

Pohdintaa ja jatkotutkimusmahdollisuuksia

Tutkimus toimi ponnahduslautana sekä matematiikkakuvani että puheen merkityksen tarkastelulle opettajan työssäni. Matematiikkakuvani muuttui mahdollisesti paitsi opiskeluaikani myös tutkimusprosessin aikana. Tulin tietoisemmaksi sen eri osa-alueista, mahdollisista vaikutuksista matematiikan opetukseen ja lisäksi käsitykseni matematiikasta laajentui. Kuten Kaasila ym. (2004) toteavat, opiskelijoiden on tärkeää huomata, että matematiikkaa pitäisi opiskella koulussa eri tavalla kuin opiskelijoiden omana kouluaikana. Kupari (1999) painottaa opettajan omien uskomusten tiedostamisen tärkeyttä opetusta muutettaessa. Uskomukset välittyvät myös puheen kautta. Sitä voidaan tutkia tarkastelemalla opettajan matematiikkakuvan ilmenemistä luokassa tapahtuvassa puheessa, kuten tässä tutkimuksessa tehtiin.

Mielestäni matematiikkaa on kaikkialla. Laskemisen lisäksi sitä opitaan aktiivisesti toimimalla ja keskustelemalla erilaisista ratkaisutavoista. Kuitenkin kuten aiemmat tutkimukset osoittavat, myös tämän tutkimuksen tulosten mukaan opettaja osittain palasi omalta kouluajaltaan tutun menetelmän käyttöön. Valtaosa esittämistäni kysymyksistä oli näet kysymyksiä, joihin oli yksi oikea vastaus. (ks. mm. Hihnala 2005; Pietilä 2002.)

Tulevaisuudentavoitteeni on kehittää myös sellaista matematiikkakuvani kanssa yhteneväistä opetusta, jossa oppilaat tuovat esille omia merkityksiään ja yhdessä rakentavat ratkaisuja opettajan esityksen tai puheellaan johdattelun sijasta, kuten useiden tutkimuksien mukaan opettajien on todettu tekevän (Myhill 2006; Mortimer & Scott 2003; Mercer & Dawes 2008; Broadie 2008; Perkkilä 2002). Se luonnollisesti edellyttää paitsi pienempää opettajan esittämien kysymysten määrää myös muodoltaan suljettujen ja funktioltaan faktakysymysten vähäisempää osuutta. Mielenkiintoista olisi myös tutkia,

millaisia mahdollisuuksia Varga–Neményi -menetelmä tarjoaa opettajan matematiikkakuvan ja esitettyjen kysymysten johdonmukaistamiseksi. Harjoittelun antaman myönteisen kokemuksen pohjalta aion syventyä menetelmään lisää ja sisällyttää sen periaatteita opetuksessani. Toivon myös saavani mahdollisuuden käydä vuoropuhelua menetelmää käyttävien opettajien kanssa.

Vastaisuudessa olisi mielenkiintoista selvittää muuttuvatko matematiikan oppitunnilla esittämiäni kysymysten (muotojen ja funktioiden) määrä. Tällöin tästä tutkimuksesta tulisi pitkittäistutkimuksen ensimmäinen vaihe. Tutkijat ovat todenneet opettajan taipuvaisuuden toistaa lapsuuden opettajilta saamia malleja, vaikka tiedostettuaan huomaisi niiden olevan ristiriidassa tietoisien ajattelun kanssa (Cooney 1999). Eli vaikka tutkimuksen tekeminen lisäsi tietoisuutta siitä, millaisia kysymyksiä esitän oppilaille ja pitämieni tuntien vuorovaikutuksen rakenteesta, ei se tarkoita, että tietoisuus suoraan kantaisi muutokseen toiminnassani. Siksi pitkittäistutkimus olisi mielenkiintoista ja hyödyllistä toteuttaa.

Lukija löytänee yhteneväisyyttä omien kokemusten ja tämän tutkimuksen opettajaopiskelijan matematiikkaan liittyvien uskomusten sekä kokemusten välillä. Lukijan on mahdollista toteuttaa oma tutkimus tämän tutkimuksen innoittamana ja rikastuttaa tutkimuskenttää. Lisäksi tutkimus herättänee matematiikan opettajien mielenkiintoa tarkastella uskomusten ilmenemistä opetuksessa. Jos jokin edellä mainituista toteutuu, tutkimuksen tutkijalle antaman annin lisäksi, on tutkimus saavuttanut tavoitteensa.

Lähteet:

- Aarnos, E & Perkkilä, P. 2007. Children's talk about mathematics and mathematical talk.
<https://jyx.jyu.fi/dspace/bitstream/handle/123456789/18035/978-951-39-3057-8.pdf?sequence=1> [viitattu 18.10.2010]
- Brodie, K. 2008. Describing teacher change: Interactions between teacher moves and learner contributions. Teoksessa J.F. Matos, P. Valero & K. Yasukava (toim.) Proceedings of the 5th International Mathematics Education and Society Conference. Universities of Lisbon and Aalborg. 31–50.
- Cooney, T. J. 1999. Conceptualizing teachers' ways of knowing. *Educational studies in mathematics* 38, 168–187.
- Edwards, D. & Mercer, N. 1987. *Common knowledge: The growth of understanding in the classroom*. London: Routledge.
- Fisher, R. 1995. *Teaching children to think*. United Kingdom: Stanley Thornes
- Hihnala, K. 2005. Laskutehtävien suorittamisesta käsitteiden ymmärtämiseen. Peruskoululaisen matemaattisen ajattelun kehittyminen aritmetiikasta algebraan siirryttäessä. *Jyväskylä Studies in Education, Psychology and Social Research* 278. Väitöskirja.
- Hirsjärvi, S., Remes, P. & Sajavaara, P. 2007. *Tutki ja kirjoita* (13. osin uud. laitos ed.). Helsinki: Tammi.

- Hill, L. 2000. Theory, practice and reflection: a pre-service primary mathematics education programme. *Teachers and teaching: theory and practice* 6 (1), 23–31.
- Ilmavirta, R. 2003. Kolmen kohdan ohjelma matematiikan opetuksen tehostamiseksi. Projekteja ja prosesseja. Opetuksen käytäntöjä matematiikassa ja viestinnässä. Tampereen yliopisto. Hämeenlinnan normaalikoulun julkaisuja 8, 15–27.
- Jacobs, J. K., Hollingsworth, H. & Givvin, K. B. 2007. Video-based research made “Easy”: Methodological Lessons Learned from the TIMSS Video Studies. Sage Publications.
- Joutsenlahti, J. 2003a. Kielentäminen matematiikan opiskelussa. Teoksessa A. Virta & O. Marttila (toim.). Opettaja, asiantuntijuus ja yhteiskunta. Ainedidaktinen symposium 7.3.2003. Turku: Turun opettajankoulutuslaitos, 188–196. Turun yliopiston kasvatustieteiden tiedekunnan julkaisuja B:72.
<http://www.joutsenlahti.net/Languaging.pdf> [viitattu 18.9.2010]
- Kaasila, R. Laine, A. & Pehkonen, E. 2004. Luokanopettajaksi opiskelevien matematiikkakuva ja sen muuttuminen. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, P. Malinen & T. Ahonen (toim.) *Matematiikka-näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. Jyväskylä: Niilo Mäki instituutti, 937–413.
- Kupari, P. 1999. Laskuharjoittelusta ongelmanratkaisuun. Matematiikan opettajien matematiikkauskokset opetuksen muovaajina. Jyväskylän yliopisto: Koulutuksen tutkimuslaitos. Tutkimuksia 7. Väitöskirja.
- Lindgren, S. 1990. Toimintamateriaalien käyttö matematiikan opiskelussa. Matikkatupakokeilu peruskoulun toisella luokalla. Tampereen yliopisto. *Acta Universities Tamperensis* A 307.
- Malaty, G. 1997. Lapsi matkalla matematiikan maailmaan. Teoksessa M. Siniharju (toim.) *Esi- ja alkuopetuksen uusia tuulia*. Helsinki: Opetushallitus, 51–92.
- Mercer, N. & Dawes, L. 2008. The Value of Exploratory Talk. Teoksessa N. Mercer & S. Hodgkinson (toim.) *Exploring Talk in School*. London: SAGE.
- Mortimer, E. & Scott, P. 2003. Meaning making in secondary science classrooms. Maidenhead: Open University Press.
- Myhill, D. & Backley M. 2004. Making Connections: Teachers’ use of Children’s prior knowledge in whole class discourse. *British journal of educational studies* 52 (3), 263–275.
- Myhill, D. 2006. Talk, Talk, Talk: Teaching and learning in whole class discourse. *Research Papers in Education* 21 (1), 19–41.
- Nevalainen, V., Juvonen-Nihtinen, M. & Lappalainen, U. 2004. Teoksessa T. Ahonen, T. Siiskonen & T. Aro (toim.) *Sanat sekaisin? Kielelliset oppimisvaikeudet ja opetus kouluiässä*. 3. painos. Jyväskylä: PS-kustannus.
- Pajares, M. F. 1992. Teachers' Beliefs and Educational Research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research* 62 (3), 307–332.

- Patton, M. Q. 2002. *Qualitative research and evaluation methods*. (3. painos.) London: Sage
- Piaget, J. 1988. *Lapsi maailmansa rakentajana*. (suom. S. Palmgren) Porvoo: WSOY
- Pehkonen, E. 1995. *Pupil's view of mathematics: Initial report for an international comparison project*. University of Helsinki. Department of Teacher Education. Research report 152.
- Pehkonen, E. 1998. On the concept "mathematical belief". Teoksessa E. Pehkonen & G. Törner (toim.) *The state-of-art in mathematics-related belief research. Results of the MAVI activities*. University of Helsinki. Department of Teacher education. Research report 195, 37-72.
- Perkkilä, P. 2002. *Opettajien matematiikkauskomukset ja matematiikan oppikirjan merkitys alkuopetuksessa*. Jyväskylän yliopisto. *Jyväskylä studies in Education, Psychology and Social research* 195. Väitöskirja.
- Sahin, A. & Kulm, G. 2008. Sixth grade mathematics teachers' intentions and use of probing, quiding, and factual questions. *Journal of mathematics teacher education* 11 (3), 221-241.
<http://www.springerlink.com/content/47531701h7h43238/fulltext.pdf>
 [viitattu 25.7.2010]
- Saksola V. & Tolonen R. 2009. *Opettajan kysymykset oppitunnilla*. Pro gradu -tutkielma. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos.
- Shoenfeld, A. H. 1985. *Mathematical problem solving*. Orlando: AP.
- Tikkanen, P. 2008. *Helpompaa ja hausempaa kuin luulin*. *Matematiikka suomalaisten ja unkarilaisten peruskoulun neljäsluokkalaisten kokemana*. Jyväskylän yliopisto. *Jyväskylä studies in Education, Psychology and Social research* 337. Väitöskirja.
- Törner, G. & Grigutsch S. 1994. "Mathematische Weltbilder" bei Studienanfängen- eine Erhebung. *Journal-für Mathematik-Didaktik* 15 (3/4), 211-251.

LÄHIKEHITYKSEN VYÖHYKKEELLÄ: 4.-LUOKKALAISTEN KOKEMUKSIA OSAAMISELTAAN ERITASOISEN PARIN KANSSA TYÖSKENTELYSTÄ MATEMATIIKASSA

Minna Muje

Johdanto

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (2004) mukaan koulun oppimisympäristön tulee ohjata oppilaita työskentelemään ryhmän jäsenenä. Lisäksi koulun työtapojen tulee kehittää oppilaan sosiaalisia taitoja ja tukea oppilaiden keskinäisessä vuorovaikutuksessa tapahtuvaa oppimista. Erilaiset ryhmä- ja parityöt opettavat oppilaille tärkeitä vuorovaikutustaitoja sekä parhaimmillaan tukevat ja syventävät oppilaan ajattelua. Tämän vuoksi ne ovat oleellinen osa koulun arkea ja työtapoja. Saloviita (2009) suosittelee ryhmätyöskentelyn aloitusmuodoksi pareittain työskentelemistä. Parityöskentelyä tulisi harjoitella koulussa päivittäin, jotta oppilaat oppivat työtavan periaatteet ja työskentelystä tulee luontevaa.

Pari- ja ryhmätöitä suunniteltaessaan opettaja joutuu pohtimaan ryhmiin jakamisen perusteita. On tavallista, että oppilaat saavat valita parinsa tai ryhmänsä itse, mikä ei aina ole järkevä toimintatapa (Saloviita 2009). Tällöin usein samat oppilaat työskentelevät jatkuvasti yhdessä, mikä ei välttämättä ole hedelmällisintä sosiaalisten taitojen oppimisessa. Ryhmän jäsenten osaaminen saattaa olla samankaltaista, mikä taas saattaa haitata oppimista. Saloviitan (2008) mukaan opettajan on aina muodostettava oppilasparit. Parien muodostuksessa tulisi huomioida parien heterogeenisyys. Tytön ja pojan tulisi mieluiten työskennellä pareina. Parien tulisi olla taidoiltaan eritasoisia, hyviä ja heikkoja oppilaita ei tulisi yhdistää omiksi pareikseen. Pareja tulisi vaihtaa säännöllisesti, jolloin oppilaat tottuvat hyväksymään opettajan tekemät valinnat.

Tämän tutkimuksen tavoitteena on selvittää, miten oppilaiden osaamiserot vaikuttavat parityöskentelyyn ja sen kokemiseen, kun työpareina on kaksi osaamiseltaan eritasoista oppilasta.

Kokemus on merkityksenantoa: mitä oppilaat ovat havainneet parityöskentelystä ja minkä merkityksen he havainnoilleen antavat (Tikkanen 2008). Osaamiseron tarkastelussa käytetään klassista teoriaa lähikehityksen vyöhykkeestä (Vygotski 1982). Lähikehityksen vyöhykkeellä tarkoitetaan osaamisen tasoa, jonka lapsi kykenee saavuttamaan taitavamman ohjauksessa, mutta ei vielä itsenäisesti. Oppimisen edetessä lähikehityksen vyöhyke muuttuu tosiasialliseksi kehitystasoksi. Toisin sanoen yhteistyössä ja ohjauksessa oppilas kykenee korkeampiin suorituksiin kuin itsenäisesti. Se, minkä lapsi osaa tehdä yhteistyössä, onnistuu häneltä jatkossa itsenäisesti. Vygotskin (1982, 184–186) mukaan hyvä opetus kulkee aina kehityksen edellä

ja suuntautuu siten lähikehityksen vyöhykkeelle. Näin lähikehityksen vyöhykkeen merkitys koulusuoritusten kannalta on jopa tärkeämpi kuin oppilaan "todellisen" osaamisen taso. Toki yhteistyössä saavutettavaakin suoritustasoa rajaavat oppilaan kehitystaso ja älylliset mahdollisuudet – aivan kaikkea lähikehityksen vyöhykkeen hyödyntäminenkään ei mahdollista.

Menetelmä

Parityöskentelyä kokeiltiin 22 oppilaan perusopetusryhmässä neljännellä luokalla matematiikan oppitunnilla opetusharjoittelussa. Oppilaat jaettiin taitotasonsa perusteella kolmeen ryhmään: heikkoihin (7 oppilasta), keskitasoihin (8 oppilasta) ja taitaviin (7 oppilasta). Keskitasoisien ryhmään sijoitettiin myös oppilaat, joiden koulumenestys oli epätasaista tai tiettyyn ryhmään sijoittaminen oli muuten hankalaa. Oppilaiden menestystä arvioitiin erilaisten testien avulla, joita oppilaat olivat tehneet alkusyksyn aikana. Lisäksi havainnoitiin oppilaiden tuntityöskentelyä ja tehtävissä suoriutumista.

Ryhmiiin jaon perusteella muodostettiin oppilaspareja, joissa oli heikko ja taitava oppilas tai kaksi keskitasoisia oppilasta. Oppilaista muodostettiin 10 tyttö-poika -paria ja yksi poikapari. Tutkimuksellisesti erityisen kiinnostavia olivat heikkojen ja taitavien oppilaiden muodostamat parit, sillä tällaisen muodostelman oletettiin mahdollistavan heikomman oppilaan toimimisen omalla lähikehityksen vyöhykkeellään. Oppilasparin pulpetit siirrettiin vierekkäin. Näin parit tutustuivat toisiinsa ja työskentely tuli luontevammaksi ennen varsinaista tutkimuskertaa. Varsinaisesta tutkimustilanteesta oli poissa yksi oppilas, joten tutkimustilanne toteutettiin yhdessä kolmen hengen ryhmässä ja yhdeksässä kahden hengen ryhmässä. Kaikkiaan tutkimukseen osallistui 21 oppilasta, joista heikkoja oli 6, taitavia 7 ja keskitasoisia 8. Heikon ja taitavan oppilaan pareja oli 6, kahden keskitasoisien oppilaan pareja 3 ja yksi kolmen oppilaan ryhmä, jossa oli kaksi keskitasoisia ja yksi taitava oppilas.

Aineisto kerättiin matematiikan tunnilla. Tunnin alussa keskusteltiin siitä, kuinka parin kanssa työskennellään, kuinka paria voi mahdollisesti auttaa ja kuinka ongelmia voidaan ratkoa yhdessä. Tämän jälkeen parit saivat samanlaiset tehtävämonisteet (liite 1), joita ryhtyivät ratkaisemaan yhdessä pohtien. Tehtävät olivat esialgebraan liittyviä, päätellen ratkaistavissa olevia tehtäviä. Aiheet olivat tarkoituksella tavallisista matematiikan tehtävistä poikkeavia, jotta oppilailla olisi pohdittavaa ja haastetta. Mekaaniset rutiinitehtävät eivät olisi tarjonneet yhtä hedelmällistä pohjaa parityöskentelylle.

Parit tekivät tehtäviä tarvitsemansa ajan, noin 10–15 minuuttia. Tämän jälkeen tehtävät kerättiin pois, ja oppilaat vastasivat lyhyeen kyselyyn työskentelystä (liite 3). Lopuksi oppilaat saivat kontrolloivan kotitehtävän (liite 2), joka oli samantyyppinen kuin tunnilla tehty. Sen tarkoituksena oli selvittää, kuinka tunnilla parin kanssa mahdollisesti opitut uudet asiat jäivät mieleen ja siirtyvät kotitehtäviin. Tuloksissa kotitehtävää ei käsitellä. Sekä tuntitehtävät

että kotitehtävät ovat kirjasta Laskutaidon paripohdittavat 4 (Ilmavirta & Uus-Leponiemi 2004).

Tulokset

Kyselyn mukaan lähes kaikkien 21 oppilaan mielestä työskentely sujuu melko hyvin tai todella hyvin. Vain yksi oppilas on sitä mieltä, että työskentely sujuu huonosti. Tämä oppilas ei liene täyttänyt lomaketta tosissaan. Kuuden parin, 13 oppilaan, mielipiteet tehtävien vaikeudesta ovat yhteneviä. Kahden heikon ja taitavan oppilasparin, 4 oppilaan, mielipiteet eroavat: heikompi pitää tehtäviä vaikeina ja taitavampi sopivina. Kahden samalla tavalla muodostetun parin, 4 oppilaan, mielipiteet eroavat päinvastaisella tavalla.

Oppilaiden kokemus siitä, kuinka paljon he itse auttoivat, ja kuinka paljon pari auttoi, vaihtelevat. Toisin sanoen toinen parista saattaa olla sitä mieltä, että auttoi toista jonkin verran, kun taas toisen mukaan häntä ei autettu lainkaan. Heikoista oppilaista puolet, 3 oppilasta, kokee, että pari auttoi heitä enemmän, kuin he itse paria. Kaksi heikkoa oppilasta kokee tilanteen tasa-arvoisena ja yhden heikon oppilaan mukaan hän itse auttoi paria enemmän. Taitavista oppilaista lähes puolet, 3 oppilasta, on sitä mieltä, että he itse auttoivat paria enemmän kuin pari heitä. Loput neljä taitavaa oppilasta arvioi auttamistilanteen tasapuoliseksi. Oppilaiden kokemukset auttamisesta on esitelty taulukossa 1.

Taulukko 1. Auttaminen eritasoisten oppilaiden kokemana, n = 21

	Auttamisen määrä oppilaiden kokemana		
	Pari auttaa enemmän	Oppilas itse auttaa enemmän	Oppilaspari auttaa toisiaan yhtä paljon
Heikko oppilas	3	1	2
Keskitasoinen oppilas	1	3	4
Taitava oppilas	0	3	4
Yhteensä	4	7	10

Oppilaista 10 pitää parityöskentelyä hyödyllisenä. Näistä heikkoja on 1, taitavia 3 ja keskitasoisia 6. Parityöskentelyä pitää turhana 9 oppilasta, joista heikkoja on 4, taitavia 3 ja keskitasoisia 2. Yksi taitava oppilas pitää parityöskentelyä hankalana. Yhden heikon oppilaan mielestä parityöskentely

on sekä hyödyllistä että turhaa. Oppilaiden kokemukset parityöskentelyn hyödyllisyydestä on esitelty taulukossa 2.

Taulukko 2. Parityöskentelyn hyödyllisyys oppilaiden kokemana, n = 21

	Parityöskentelyn hyödyllisyys		
	Hyödyllistä	Turhaa	Muu maininta
Heikko oppilas	1	4	hyödyllistä ja turhaa (1)
Keskitasoinen oppilas	6	2	
Taitava oppilas	3	3	hankalaa (1)
Yhteensä	10	9	2

Jatkossa parin kanssa haluaisi työskennellä 8 oppilasta, joista 1 on heikko, 3 taitavaa ja 4 keskitasoista. Oppilaista 8 ei haluaisi enää työskennellä parin kanssa. Näistä heikkoja on 4, taitavia 2 ja keskitasoisia 2. Oppilaista 3 ei tiedä tai ole varma halustaan työskennellä parin kanssa jatkossa. Yksi oppilas on valmis työskentelemään jatkossa parin kanssa välillä. Kaksi oppilasta asettaa parityöskentelylle ehtoja, kuten että parin saa valita itse tai että saa työskennellä samaa sukupuolta olevan parin kanssa. Oppilaiden halukkuus työskennellä parin kanssa jatkossa on esitelty taulukossa 3.

Taulukko 3. Halu työskennellä pareittain jatkossa, n = 21

	Parityöskentely jatkossa		
	Kyllä	Ei	Muu maininta
Heikko oppilas	1	4	Ei ole varma (1)
Keskitasoinen oppilas	4	2	Ei tiedä (1) Riippuu parista (1)
Taitava oppilas	3	2	Välillä (1) Samaa sukupuolta olevan kanssa (1)
Yhteensä	8	8	5

Oppilaiden kokemuksia parityöstä

Tämän tutkimuksen tavoitteena oli selvittää, miten oppilaat kokevat parityöskentelyn osaamiseltaan eritasoisen parin kanssa. Tutkimuksessa ilmeni, että oppilaat kokevat parityöskentelyn pääosin sujuvaksi tavaksi työskennellä. Kuitenkin lähes puolet oppilaista pitää parityöskentelyä turhana. Huomattavaa on, että suurin osa heikoista oppilaista ajattelee näin, joten ehkä he eivät hyötäneet taitavamman tuesta niin paljon kuin odotettiin.

Heikoista oppilaista suurin osa kokee, että pari auttaa heitä enemmän kuin he paria. Vastaavasti lähes puolet taitavista oppilaista kokee auttavansa paria enemmän kuin pari heitä. Tämänkaltaiset erilaiset kokemukset heikkojen ja taitavien oppilaiden välillä olivat odotettavissakin. Mielenkiintoista on, että vaikka heikot oppilaat kokevat tullessa autetuksi, he silti kokevat työtavan turhaksi. On mahdollista, että oppilaat eivät ole harjaantuneet toisen tarkoituksenmukaiseen auttamiseen ja oman ajattelun selvittämiseen toiselle, jolloin taitavankaan oppilaan tuki ei hyödytä heikkoa oppilasta. Tämän vuoksi parityöskentelyä tulisi harjoitella oppilaiden kanssa ja kehittää edelleen.

Myös taitavilla oppilailla esiintyy muutamia mainintoja, joissa parityöskentely koettiin turhaksi tai hankalaksi. Näin ollen taitavat oppilaat eivät välttämättä aina hyödy siitä, että pääsevät ”opettamaan” toista ja selittämään omaa ajatteluaan. Omien havaintojeni perusteella näyttäisi siltä, että useassa tapauksessa heikon oppilaan puutteelliset sosiaaliset taidot tai esimerkiksi keskittymisvaikeudet estävät sujuvan parityöskentelyn. Mielestäni tällaisessa tilanteessa vastuuta ei voi vierittää taitavalle oppilaalle ja tuudittautua siihen ajatukseen, että tämä pääsee harjoittamaan omia sosiaalisia taitojaan ja opettajan ominaisuuksiaan. Heikon oppilaan sosiaalisten taitojen kehittäminen ei voi olla taitavan oppilaan tehtävä, vaan hänelläkin tulisi olla oikeus keskittyä opeteltavaan asiaan.

Miten ohjaisin parityöskentelyä?

Tietenkään parityöskentelyä ei ole syytä unohtaa, vaikka luokassa olisikin oppilaita, joille yhteistyö tuottaa hankaluuksia. Tällöin työpareja on vain vaihdettava säännöllisesti, kuten Saloviita (2009) suosittaa, ja huolehdittava riittävän tuen saamisesta. Opettaja voi mahdollisuuksien mukaan keskittyä auttamaan enemmän sellaista paria, jolla sosiaalisten taitojen harjoittelu on keskeistä. Lisäksi mielestäni voisi olla hyödyllistä, että taitava oppilas saisi välillä parikseen toisen taitavan, jotta opetus tarjoaisi taitavillekin oppilaille haastetta. Itse siis vaihtelisin pareja siten, että välillä työskennellä samantasoisena ja välillä eritasoisen parin kanssa, vaikka Saloviidan (2009) mukaan näin ei tulisi tehdä. Mielestäni on kohtuullista tarjota taitaville oppilaille välillä haasteita ja mahdollisuuksia kehittää omaa ajatteluaan pidemmälle vertaisen kanssa sen sijaan, että taitava oppilas on aina apuopettajan roolissa.

Hieman alle puolet oppilaista haluaisi jatkossakin työskennellä parin kanssa. Vastaava osuus oppilaista puolestaan ei haluaisi. Näistä oppilaista valtaosa on heikkoja. Tämän perusteella vaikuttaisi siltä, että heikot oppilaat kokevat hyötyvänsä parityöskentelystä vähiten, vaikka parityön pitäisi tukea nimenomaan heikkojen oppilaiden toimintaa lähikehityksen vyöhykkeellä. Voi olla, että ääritilanteessa taitavampi oppilas vie tehtävää eteenpäin heikomman roikkuessa perässä ja kopioidessa vastauksia taitavammalta. Tällöin parityöskentely ei tietenkään tue heikon oppilaan ajattelua. Toisaalta heikolle oppilaalle voi olla vaikeaa myöntää, että parista on apua, minkä vuoksi tulokset vääristyvät negatiivisiksi. Lisäksi kielteiseen asenteeseen saattaa vaikuttaa se, että opettaja on määrännyt parit.

Osa oppilaista asettaa ehtoja halulleen työskennellä parin kanssa jatkossa. Oppilaat haluaisivat valita parin itse tai työskennellä samaa sukupuolta olevan parin kanssa. Mielestäni tämä kertoo siitä, että oppilaat eivät ehkä ole tottuneet parityöskentelyyn, ja sitä on edelleen harjoiteltava. Selvästi oppilailla oli myös vaikeuksia hyväksyä, että opettaja päättää parit, mikä on Saloviidankin (2009) mukaan tottumuskysymys.

Tutkimus osoittaa, että parityöskentely vaatii harjoittelua, seuranta ja kehittämistä onnistuakseen. Osa oppilaista kokee hyötyvänsä ja saavansa pariltaan apua, mutta osa kokee työskentelyn turhaksi. Erityisen paljon kielteisiä kokemuksia on heikoilla oppilailla. Uskon, että järjestelmällisellä harjoittelulla ja kehittämisellä asenteet parityöskentelyä kohtaan muuttuisivat myönteisemmiksi. Pareittain työskentely tarjoaa hyvät mahdollisuudet kehittää oppilaan ajattelua ja sosiaalisia taitoja. Erilaisia parityösovelluksia on lukemattomia. Niitä kokeilemalla ja kehittämällä voidaan parityöskentelystä tehdä luonteva ja toimiva osa opetusta ja oppimista.

Lähteet

- Ilmavirta, R. & Uus-Leponiemi, T. 2004. Laskutaidon paripohdittavat 4. Porvoo: WSOY.
- Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004. Helsinki: Opetushallitus.
- Saloviita, T. 2009. Ryhmätyön rajattomat mahdollisuudet. Teoksessa T. Saloviita (toim.) Meidän koulu. Keinoja työrauhan ja hyvän ilmapiirin saavuttamiseen. Juva: PS-kustannus, 13–26.
- Tikkanen, P. 2008. "Helpompaa ja hauskeempaa kuin luulin" Matematiikka suomalaisten ja unkarilaisten perusopetuksen neljäsluokkalaisten kokemana. Jyväskylä studies in education, psychology and social research 337. Jyväskylän yliopisto.
- Vygotski, L. S. 1931/1982. Ajattelu ja kieli. Espoo: Weilin+Göös.

Liite 1

Nimi:

$$A + A + A + A = 48$$

$$B \cdot B + B = 72$$

$$C \cdot C + C : C = 50$$

$$D \cdot D + D \cdot D = 50$$

$$100 - E \cdot E = 19$$

Selvitä mitkä luvut sopivat kirjainten A, B, C, D ja E paikalle!

Vastaus:

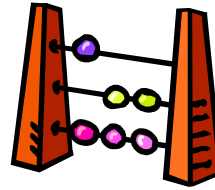
A =

B =

C =

D =

E =



Liite 2

Nimi:

$$A + 12 < 20$$

$$B - 10 < 10$$

$$C \cdot 3 < 20$$

$$D \cdot 2 + 6 < 20$$

$$E \cdot 3 - 6 < 10$$

Selvitä mitkä ovat suurimmat mahdolliset kokonaisluvut, jotka sopivat kirjainten A, B, C, D ja E paikalle!

Vastaus:

A =

B =

C =

D =

E =



Liite 3

Nimi:

Tehtävät olivat minusta

- helppoja
- sopivia
- vaikeita

Työskentely parin kanssa sujui

- todella hyvin
- melko hyvin
- huonosti

Autoin pariani

- paljon
- jonkin verran
- vähän
- en ollenkaan

Parini auttoi minua

- paljon
- jonkin verran
- vähän
- ei ollenkaan

Parintyöskentely oli minusta

- hyödyllistä
- turhaa
- hankalaa

Haluaisin jatkossakin työskennellä parin kanssa

- kyllä
- en

Kertolaskun kombinatoriikkaa Pirjo Tikkanen

Ongelma: Kuinka monta erilaista kahden kokonaisluvun kertolaskua (tuloa) voidaan saada, kun kertolaskun vastaus (lukujen tulo arvo) on 9 000? Tulontekijät voivat olla yksi- tai useampinumeroisia. Tulontekijöissä on ensimmäisenä numero 1, 3 tai 9 ja yksi tai useampia nollia.

Ongelma kertolaskun kombinaatioista sopii kolmasluokkalaisille, kun on käsitelty 10:llä, 100:lla ja 1000:lla kertomista. Ongelmassa puhutaan kertolaskusta ja sen vastauksesta tai tulosta ja tulo arvoista sen mukaan, miten oppilaat tuntevat näitä nimityksiä.

Ongelmaa ratkaistaessa toteutuvat monet tavoitteet:

- ongelma mahdollistaa tutkivan oppimisen: Miten monta tuloa voidaan muodostaa, kun tulo arvo tunnetaan
- ongelma ohjaa arvioimaan mahdollisten tulojen lukumäärää ja perustelemaan niitä
- ongelma syventää oppilaiden ymmärrystä tehtävän ehtojen merkityksestä ja ohjaa oppilaita käyttämään useita tehtävän ehtoja samanaikaisesti
- ongelma varmentaa luku- ja numero-käsitteen erottamista
- ratkaisujen lukumäärä monipuolistaa näkemystä siitä, että matematiikassa olisi vain yksi oikea vastaus tai ongelma voidaan ratkaista vain yhdellä tavalla
- ratkaisun visualisointi tarjoaa esteettisen elämyksen matematiikasta

Aluksi oppilaat lukevat ongelman hiljaa itsekseen useaan kertaan, minkä jälkeen he lukevat sen luokkatoverilleen ääneen. Koska joidenkin kolmasluokkalaisten ymmärtävä lukutaito saattaa olla vielä orastavaa, opettaja lukee ongelman hitaasti ääneen. Lukemisen jälkeen oppilailla tulee olla mahdollisuus tehdä tarkentavia kysymyksiä. Ne paljastavat, miten oppilaat ymmärtävät ongelman matemaattista kieltä. Oppilaiden esittämiä kysymyksiä pohditaan luokan kanssa yhdessä antamatta vastausta suoraan. Sitten oppilaat arvioivat tulojen lukumäärän, joka merkitään muistiin ja perustellaan omin sanoin.

Ennakoituaan tulojen lukumäärän oppilaat ratkaisevat ongelmaa itsenäisesti tai pareittain. Oppilaiden yksilöllisen työskentelyn tai parityön havainnointi paljastaa, miten eri tavoin ja miten eritasoisesti oppilaat käsittelevät ongelmaa. Jotkut oppilaat keksivät satunnaisia kertolaskuja, joiden tulo arvo on 9 000. Järjestelmällisesti ajattelevat oppilaat ensin luettelivat ehtojen sallimat luvut, minkä jälkeen he kokeillen etsivät sopivat tulot.

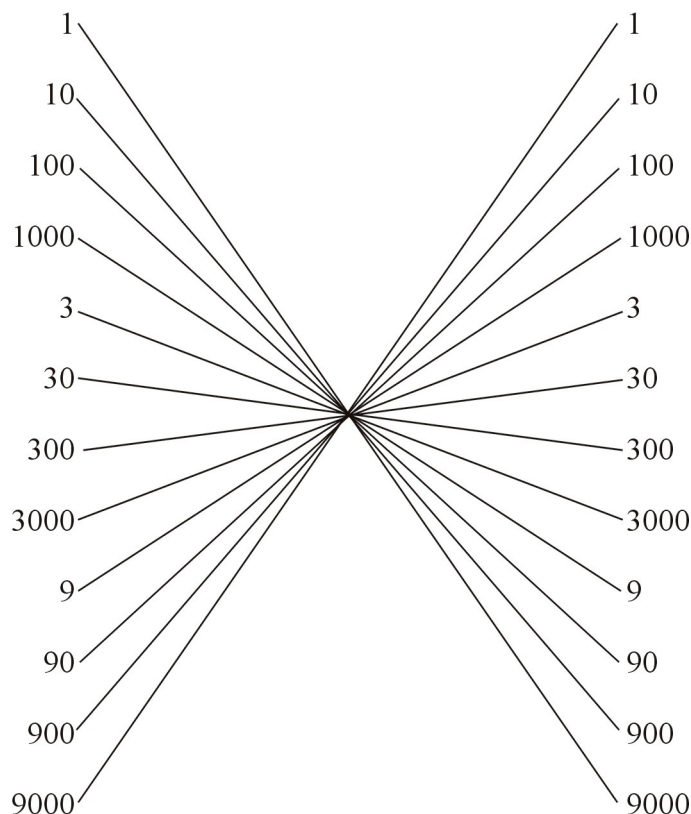
Oppilaat esittelevät ratkaisujaan lähimmille vierustovereilleen pienryhmässä. Pienryhmät valitsevat koko luokalle esiteltäväksi ratkaisun, jossa on löydetty eniten oikeita tulot. Koko luokalle esitetyt ratkaisut

herättävät oppilaissa pohdintaa ratkaisuprosessin järjestelmällisestä etenemisestä.

Visuaalinen lukujoukkojen muodostaminen tukee moniehtoisen ongelman ratkaisemista: Ensiksi luetteloidaan allekkain kaikki mahdolliset luvut; 1, 10, 100, 1 000, 3, 30, 300, 3 000, 9, 90, 900 ja 9 000. Kirjoitetaan viereen toinen lukujoukko, jossa on samat luvut kuin ensimmäisessä. Näiden kahden joukon luvuista yhdistetään viivalla ne, joiden tulon arvo on 9 000 (ks. kuviota 1).

Lukuja yhdistävistä viivoista on konkreettisesti laskettavissa, että ehtojen täyttäviä tuloja on 12 erilaista. Lopuksi kirjoitetaan kaikki tulot, joiden arvo on 9 000. Oppilaat arvioivat ongelman ratkaisun alussa tekemäänsä ennakoarvioita tulojen määrästä ja tutkimuksen tuloksena saatua tulosta. Heitä ohjataan vertaamaan ennakoarvion perusteluja ja tehtyä tutkimusta tulojen lukumäärästä.

Ongelman visuaalinen ratkaisu siivittää kolmasluokkalaisten mielikuvitusta: He antavat erilaisia merkityksiä kuviolle, esimerkiksi perhonen. Innoissaan oppilaat värittävät ja täydentävät ratkaisun mielikuvansa mukaan vaikkapa lentäväksi luku- tai tuloperhoseksi. Mielikuvat elävöittävät ja syventävät oppimista Tamás Vargan mukaan.



Kuvio. Kertolaskun kombinatorisen ongelman visuaalinen ratkaisu

Ratkaisun visuaalinen muoto nostaa esiin myös ratkaisussa olevan säännönmukaisuuden, jossa kaikki tekijät käytetään täsmälleen yhden tulon

muodostamiseen ja näin järjestettynä parit löytyvät aina symmetrisesti yhtä kaukana listan keskustasta. Sama symmetrinen kuvio syntyy myös, jos luvut asetetaan listaan suuruusjärjestyksessä. Sama symmetria löydetään millä tahansa tekijöihin jaolla, jolloin esimerkiksi luvun 6 tekijöitä voidaan käsitellä samalla tavalla.

Oppilaat voivat kokeilla, toimiiko symmetria aina käytetyllä järjestyksellä. Oppilaiden edellytysten mukaan voidaan pohtia, onko tehtävässä riittävästi ehtoja, jotta aina päädyttäisiin vain 12 erilaiseen ratkaisuun. Esitetty ongelma perustuu kolmasluokkalaisten tuntemiin luonnollisiin lukuihin, jota ei kuitenkaan ongelmassa eksplisiittisesti ilmaista. Mahdollisten ratkaisujen määrä on suurempi, jos hyväksytään esimerkiksi negatiivisten kokonaislukujen ja rationaalilukujen käyttö. Näin ongelmaa voidaan käyttää soveltaen ylemmilläkin luokka-asteilla.

